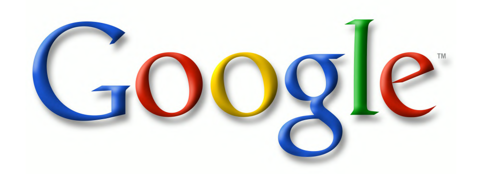


Sammlung Schubert

Sammlung mathematischer Lehrbücher.

Verzeichnis der erschienenen und projektierten Bände.

Erschienen sind bis Oktober 1906:

Band I: **Elementare Arithmetik und Algebra** von Professor Dr. Hermann Schubert in Hamburg. M. 2.80.

„ II: **Elementare Planimetrie** von Prof. W. Pflieger in

„ ... n Dr.

„ I ... ert in

„ ... Vahr- l dio- mann

„ ... hlen- 40.

„ V ... Böger

„ VI ... Max

„ I ... bene, 4.—.

„ ... Diffe- ver in

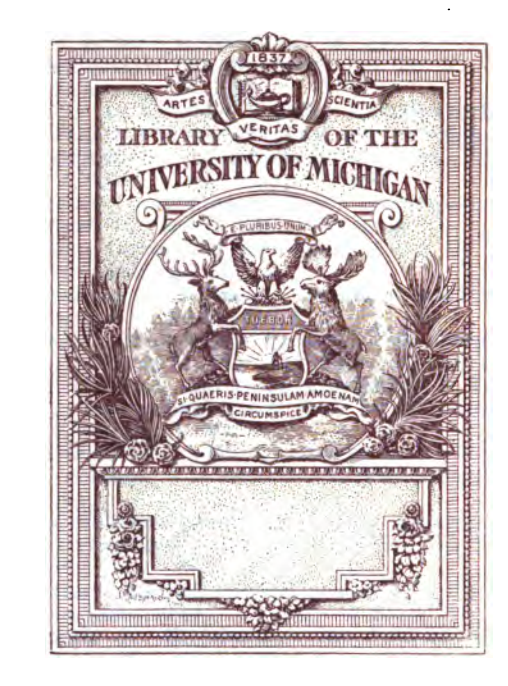
„ ... gral- önigs-

„ X ... dar- ler in

„ XI ... singer

„ XI ... ge in

„ XI ... nung



„ XX: **Versicherungsmathematik** von Dr. W. Großmann in Wien. M. 5.—.

„ XXV: **Analytische Geometrie des Raumes II. Teil: Die Flächen zweiten Grades** von Prof. Dr. Max Simon in Straßburg. M. 4.40.

„ XXVII: **Geometr. Transformationen I. Teil: Die projektiven Transformationen nebst ihren Anwendungen** von Prof. Dr. Karl Doehlemann in München. M. 10.—.

„ XXIX: **Allgemeine Theorie der Raumkurven u. Flächen I. Teil** von Prof. Dr. Victor Kommerell in Reutlingen u. Prof. Dr. Karl Kommerell in Heilbronn. M. 4.80.

Band XXXI: **Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale** von Oberlehrer E. Landfriedt in Straßburg. M. 8.50.

„ XXXII: **Theorie und Praxis der Reihen** von Professor Dr. C. Runge in Hannover. M. 7.—.

„ XXXIV: **Liniengeometrie mit Anwendungen I. Teil** von Prof. Dr. Konrad Zindler in Innsbruck. M. 12.—.

„ XXXV: **Mehrdimensionale Geometrie I. Teil: Die linearen Räume** von Prof. Dr. P. H. Schoute in Groningen. M. 10.—.

„ XXXVI: **Mehrdimensionale Geometrie II. Teil: Die Polytope** von Prof. Dr. P. H. Schoute in Groningen. M. 10.—.

„ XXXVII: **Lehrbuch der Mechanik I: Kinematik** von Prof. Dr. Karl Heun in Karlsruhe. M. 8.—.

„ XXXVIII: **Angewandte Potentialtheorie in elementarer Behandlung I. Teil** von Prof. E. Grimsehl in Hamburg. M. 6.—.

„ XXXIX: **Thermodynamik I. Teil** von Prof. Dr. W. Voigt in Göttingen. M. 10.—.

„ XL: **Mathematische Optik** von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. M. 6.—.

„ XLI: **Theorie der Elektrizität und des Magnetismus I. Teil: Elektrostatik und Elektrokinetik** von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. M. 5.—.

„ XLII: **Theorie der Elektrizität und des Magnetismus II. Tl.: Magnetismus u. Elektromagnetismus** von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. M. 7.—.

„ XLIII: **Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung** von Dr. Heinr. Wieleitner in Speyer. M. 10.—.

„ XLIV: **Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen II. Teil** von Prof. Dr. Victor Kommerell in Reutlingen und Professor Dr. Karl Kommerell in Heilbronn. M. 5.80.

„ XLV: **Niedere Analysis II. Teil: Funktionen, Potenzreihen, Gleichungen** von Prof. Dr. Hermann Schubert in Hamburg. M. 3.80.

„ XLVI: **Thetafunktionen u. hyperelliptische Funktionen** von Oberlehrer E. Landfriedt in Straßburg. M. 4.50.

„ XLVIII: **Thermodynamik II. Teil** von Prof. Dr. W. Voigt in Göttingen. M. 10.—.

„ XLIX: **Nichteuklidische Geometrie** von Prof. Dr. Heinr. Liebmann in Leipzig. M. 6.50.

„ L: **Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung** von Dr. J. Horn, Professor an der Bergakademie zu Clausthal. M. 10.—.

„ LI: **Liniengeometrie mit Anwendungen II. Teil** von Prof. Dr. Konrad Zindler in Innsbruck. M. 8.—.

„ LII: **Theorie der geometrischen Konstruktionen** von Prof. Aug. Adler in Wien. M. 9.—.

In Vorbereitung bzw. projektiert sind:

Elemente der Astronomie.
Mathematische Geographie.
Darstellende Geometrie von Prof. Dr. Th. Schmid in Wien.
Geschichte der Mathematik von Prof. Dr. A. v. Braunmühl und Prof. Dr. S. Günther in München.
Dynamik von Prof. Dr. Karl Heun in Karlsruhe.
Technische Mechanik von Prof. Dr. Karl Heun in Karlsruhe.
Geodäsie von Prof. Dr. A. Galle in Potsdam.
Allgemeine Funktionentheorie von Dr. Paul Epstein in Straßburg.
Räumliche projektive Geometrie.
Geometrische Transformationen II. Teil von Prof. Dr. Karl Doehlemann in München.
Elliptische Funktionen von Dr. Karl Boehm in Heidelberg.
Allgemeine Formen- und Invariantentheorie von Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg.
Angewandte Potentialtheorie in elementarer Behandlung II. Teil von Prof. E. Grimsehl in Hamburg.
Liniengeometrie III. Teil von Prof. Dr. Konrad Zindler in Innsbruck.
Elektromagnetische Lichttheorie von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg.
Gruppen- u. Substitutionentheorie v. Prof. Dr. E. Netto in Gießen.
Theorie der Flächen dritter Ordnung.
Mathematische Potentialtheorie v. Prof. Dr. A. Wangerin in Halle.
Elastizitäts- und Festigkeitslehre im Bauwesen von Dr. ing. H. Reißner in Berlin.
Elastizitäts- und Festigkeitslehre im Maschinenbau von Dr. Rudolf Wagner in Stettin.
Graphisches Rechnen von Prof. Aug. Adler in Wien.
Partielle Differentialgleichungen von Prof. J. Horn in Clausthal.
Vektorenanalyse.
Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven von Dr. Heinrich Wieleitner in Speyer.
Grundlehren der geographischen Ortsbestimmung von Dr. K. Graff in Hamburg.
Grundlagen der theoretischen Chemie von Dr. Franz Wenzel in Wien.

Sammlung Schubert XXXVII

Lehrbuch der Mechanik

I. Teil

Kinematik

mit einer Einleitung in die elementare Vektorrechnung

von

Karl Heun, Dr. phil.
Professor an der technischen Hochschule in Karlsruhe

Mit 94 Figuren im Text

Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
1906

Spamersche Buchdruckerei, Leipzig-R.

Das vorliegende Lehrbuch der Kinematik gibt eine elementare Darstellung dieses Zweiges der Mechanik, wie sie dem gegenwärtigen Entwicklungszustand entspricht. Nachdem im letzten Jahrzehnt eine lebendiger Aufschwung des Interesses für die mechanischen Grundlagen der Physik, Chemie und Technik unverkennbar an den Tag getreten ist und bereits eine ungewöhnlich große Zahl vortrefflicher Lehrbücher der Mechanik in kurzer Frist aufeinanderfolgend das Bedürfnis für umfassendere und gründlichere Darstellungen dieser Wissenschaft erwiesen haben, erscheint dem Verfasser des neu hinzutretenden Elementarbuches die Verpflichtung der Rechtfertigung seiner Arbeit keine allzuschwere.

In bezug auf die Umgrenzung der Kinematik ist die Auffassung, welche Heinrich Hertz in seinen Prinzipien der Mechanik vertreten hat, maßgebend gewesen. Danach ist der Massenbegriff aufgenommen worden und die hierdurch mögliche Ausarbeitung der Systembegriffe, deren Nichtbeachtung eine bedauerliche Verzerrung des modernen Bildes der Kinematik zur Folge hat, ist in den Mittelpunkt der Darstellung gerückt. Hieraus erklären sich fast alle Abweichungen in der Anordnung und Begrenzung des Stoffes, welche manchem Leser beim Vergleich mit den vorhandenen Lehrbüchern auffallen werden.

Es ist kaum nötig darauf hinzuweisen, daß die geschichtliche Ausbildung der Systembegriffe in der Kinematik weit zurückreicht. Wir verdanken sie im wesentlichen Euler und Lagrange und man kann ohne Zögern behaupten, daß diese auch bereits ihre fundamentale Bedeutung so klar erkannt haben, wie es heute möglich ist. Hätte sich die Mechanik nicht während eines halben Jahrhunderts unter der Führung Jacobis, Hamiltons und anderer Mathematiker fast ausschließlich mit Problemen der Astronomie und physikalischen Atomistik beschäftigt, dann wäre das Verständnis für eine umfassendere Konzeption der Massenkinematik lange vor Hertz zum Durchbruch gekommen und die Systembegriffe wären zum Gemeingut aller derjenigen geworden, welchen die Anwendungen der Mechanik obliegen. Überhaupt kann man

nicht leugnen, daß das gewohnheitsmäßige, ängstliche Festhalten an den Gepflogenheiten einer Literaturperiode der Mechanik, die wesentlich andere Ziele und Bedürfnisse hatte, als diejenigen, welche der heutige Physiker und Techniker vor sich hat, auf die Entwicklung der praktisch verwertbaren Grundlagen dieser Wissenschaft nur zu lange ungünstig eingewirkt und damit vor allem eine umfassende Durchbildung des Technikers in der Mechanik erschwert.

Vom Standpunkte des methodischen Unterrichts wird man vielleicht einwenden, daß der strengen Trennung des Stoffes in Kinematik und Dynamik wohlbegründete Nachteile im Wege stehen. Diese Ansicht vertrete ich selbst, indem ich in meinen Vorlesungen von einer solchen Trennung absehe und die einzelnen Probleme von beiden Gesichtspunkten aus zugleich erledige, wie es der vorwiegenden Gewohnheit entspricht. Dessen ungeachtet ist in dem gegenwärtigen Lehrbuch die systematische Spaltung durchgeführt, da der Anfänger beim Selbststudium oder beim Gebrauch desselben zur Erweiterung seiner bereits anderweitig erworbenen Kenntnisse zunächst die ihm schwieriger erscheinenden Partien einfach überschlagen kann und dennoch hinreichendes Material vorfindet, welches seinen augenblicklichen Bedürfnissen entspricht. Auch wird bei dieser selektiven Art der Benutzung des Buches eine sich allmählich steigernde Fähigkeit in der selbständigen Beurteilung der eigenen Bedürfnisse und der auszuwählenden Hilfsmittel sehr günstig auf die wissenschaftliche Ausbildung wirken, die niemals am fremden Gängelbande erreicht werden kann. Selbst die Gefahr eines gelegentlichen Fehlgriffes in der Auswahl darf bei dieser Methode nicht zu hoch angeschlagen werden, denn fortes fortuna adjuvat, während Studierende, welche immer fürchten auf dem falschen Wege zu sein, selten ein lohnendes Ziel erreichen.

Überwiegender ist der Vorteil der Trennung für diejenigen Benutzer des Buches, welche die ersten Elemente der Mechanik bereits beherrschen und genötigt sind, im gegebenen Falle einem bestimmten Probleme näher zu treten. Hier erleichtert die systematische Anordnung in Verbindung mit dem alphabetischen Sachregister die rasche Orientierung wesentlich, und die Bequemlichkeit der Benutzung wächst bei zunehmender Vertrautheit mit dem Inhalt des Buches.

Ausschlaggebend war endlich ein anderer Gesichtspunkt, der die letzten Bedenken des Verfassers bei der Entschließung zur

vorliegenden Einteilung des Stoffes beseitigt hat. Schon ein flüchtiger Vergleich der zahlreichen in den letzten Jahren erschienenen Lehrbücher der Mechanik zeigt deutlich, daß man heute unter dem Druck anderer Anforderungen steht als in der vorangehenden Periode der vorwiegend mathematischen oder astronomischen Interessen. Man bietet dem Studierenden jetzt eine größere Mannigfaltigkeit der benutzbaren Hilfsmittel und methodischen Gesichtspunkte, um ihn auf breiterer Basis für die selbständige Bewältigung von Problemen vorzubereiten, wie sie die Praxis mit ihrer scheinbar launenhaften Vielgestaltigkeit aufwirft. Wer nur einmal in die Lage gekommen ist, ein solches Problem zu lösen, der wird bald gemerkt haben, daß hier der zum Ziele führende Weg ein ganz anderer ist, wie bei der Durcharbeitung von Übungsbeispielen in einer Aufgabensammlung. Jetzt erscheinen die Schwierigkeiten so gesteigert, daß meistens nur eine sorgfältige Zerlegung der Arbeit eine erfolgreiche Lösung möglich macht. Eine klare Abgrenzung des Objektes der Bewegung, wenn es mit anderen Teilen verbunden ist, ist von vornherein nicht leicht — und doch hängt von der geschickten Ausführung dieses ersten Schrittes so viel ab. Dann kommt die kinematische Erfassung des Systems, seiner Bewegungsmöglichkeiten, seines Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustandes, wie sie der speziellen Art seiner Gebundenheit entsprechen. Nachdem dies alles mit ausdauernder Geduld erledigt ist, steht man vor neuen Schwierigkeiten. Das Kräftesystem ist in seinem ganzen Umfang zu berücksichtigen und man gelangt dann mühevoll Schritt um Schritt weitertastend zu den Differentialgleichungen der Bewegung des Systems. Bis zu diesem ersten Ziele sind theoretische Kenntnisse allein nicht immer ausreichend. Oft muß man ad hoc angefertigte Modelle zu Hilfe nehmen, um die kinematische Orientierung zu vervollständigen oder sorgfältig erdachte Versuchsanordnungen benützen, damit man sich von der Richtigkeit der Kräfteauffassung zu überzeugen vermag. Hat man so nach allen Seiten gesichtet und gesichert, dann kommt die spezifisch kinetische Arbeitsleistung: die Integration der Bewegungsgleichungen, die Konstantenbestimmung, die sorgfältige Diskussion der endlichen Bewegungsgleichungen, die Ausschälung besonders einfacher und übersichtlicher Bewegungsformen aus dem scheinbaren Gewirr aller möglicher zusammengesetzter Formen, welche die unmittelbare Integration — wenn sie überhaupt möglich war — ergeben hat. Aber selbst auf dieser Stufe der scheinbaren Voll-

endung der Lösung weichen die Sorgen und die Anforderungen an die Geduld noch nicht. Man ist vielmehr meistens jetzt erst imstande durch Versuche und Beobachtungen festzustellen, ob alle die zahlreichen, anfangs mehr oder weniger unsicheren Annahmen, welche zu dem kinematischen und dynamischen Ansatz führten, der Wirklichkeit hinreichend entsprechen, ob die Vernachlässigungen, welche zugunsten einer möglichst einfachen Lösung an verschiedenen Stellen der Durchführung oft ziemlich gewaltsam angebracht wurden, auch nicht etwa verzerrend auf das mechanische Bild, das man doch im großen und ganzen möglichst wahrheitsgetreu erhalten will, eingewirkt haben.

Die naturgemäße Arbeitsmethode zur Lösung aktueller Probleme entspricht daher durchaus der Einteilung der Mechanik in Kinematik und Dynamik und die Verschmelzung beider Abschnitte empfiehlt sich nur noch beim Anfangsunterricht. Über die Auswahl und Verteilung des Stoffes im einzelnen ist hier nichts zu bemerken, da die Inhaltsübersicht diese sofort erkennen läßt. Dagegen ist es meine Pflicht, der Mitarbeiter zu gedenken, die mich bei der Herstellung des Manuskripts und während der Drucklegung in der dankenswertesten Weise unterstützt haben.

Herr Professor Dr. Hamel-Brünn stand mir während der Bearbeitung des Textes beratend, helfend und erkennbare Mängel der Darstellung bessernd zur Seite. Der Abschnitt über das Nullsystem ist durch ihn in wesentlichen Punkten beeinflußt, während einige Paragraphen, welche über die nicht-holonomen Bewegungen handeln, in der vorliegenden Form fast ganz von seiner Hand redigiert sind. Außerdem hat er sich der Mühe unterzogen, von allen Bogen die letzte Revision zu lesen.

Herr Dr. Winkelmann-Karlsruhe nahm dem Verfasser das mühevolle Geschäft der Satzkorrektur zum größten Teile ab und hat namentlich dazu beigetragen, daß die hier zum ersten Male durchgeführte neue Bezeichnung der Dimensionen, wodurch sich die wesentlichen Abweichungen des vorliegenden Werkes in der Wahl der Symbole erklären, möglichst korrekt ausgefallen ist.

Gleichen Dank möchte ich auch dem Herrn Verleger und der Druckerei an dieser Stelle für ihre Mühewaltung aussprechen, da die im vorliegenden Falle ungewöhnlichen Anforderungen an die Ausstattung des Buches im ganzen und die Herstellung des Satzes nur durch ein unermüdliches Entgegenkommen erfüllt werden konnten.

Karlsruhe, Ostern 1906.

Bezeichnung der geometrischen Dimensionen.

(Man vergleiche Nr. 11 des Textes.)

Dimension	Elementargröße	Systemgröße
−2 Gotisch maj.	$\mathfrak{K}$ spezifische Kraft, bezogen auf die Volumeinheit.	Durch die entsprechende steile oder fette Type bezeichnet.
−1 Gotisch min.	$\mathfrak{m}$ spezifische Masse, bezogen auf die Längeneinheit.	$\boldsymbol{\mathfrak{e}}$ kinetische Energie der Volumeinheit.
0 Griech. min.	τ Zeit. μ Masse.	ω Winkelgeschwindigkeit.
+1 Latein. min.	$\bar{a}$ Strecke. $\bar{v}$ Geschwindigkeit. $\bar{w}$ Beschleunigung.	$\boldsymbol{\mathfrak{p}}$ Impulsvektor der Translation.
+2 Latein. maj.	$\bar{F}$ Flächengeschwindigkeit. E kinetische Energie eines Massenpunktes.	$\bar{\mathbf{J}}$ Impulsvektor der Rotation. $\mathbf{E}$ kinetische Energie des Systems.
+3 Griech. maj.		Π Volumen eines Körpers.

Jede gerichtete Größe ist durch einen übergesetzten Horizontalstrich ausgezeichnet.

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

I. Allgemeines über Mechanik.

I. Abschnitt.

Kinematik des Punktes.

A) Bewegung des Punktes in freier Bahn.

B) Bewegung des Punktes auf einer Fläche.

II. Abschnitt.

Elementare Punktsysteme.

III. Abschnitt.

Kinematik des starren Körpers.

C) Systemgrößen für den starren Körper.

IV. Abschnitt.

Ketten aus starren Körpern.

V. Abschnitt.

Allgemeine Systeme.

Einleitung.

I. Allgemeines über Mechanik.

1. Aufgabe der Mechanik. Die mathematische Beschreibung von Bewegungen war schon im Altertume bekannt. Vor allem waren es die scheinbare Drehung des Sternhimmels und die verwickelten Bahnen der Planeten (einschl. Sonne und Mond), welche sehr frühzeitig zu einer mathematischen Erfassung dieser Bewegungsformen führten. Indes begnügte man sich damit, den Lauf der Himmelskörper durch einfache oder zusammengesetzte Kreisbewegungen zu deuten und dementsprechend geometrisch zu fixieren. Die Objekte der Bewegung waren hier Punkte (bei Sonne und Mond der Mittelpunkt der Scheibe). Aber schon Archimedes (287—212) erforschte das Gesetz der Kräftewirkung am Hebel. Er betrachtet also ein starres System, welches um eine feste Achse drehbar ist. Die moderne Mechanik, deren Grundlagen durch Stevin (1548—1620), Galilei (1564—1642), Huyghens (1629—1695) und Newton (1643—1727) geschaffen sind, betrachtet nicht allein die Bewegung von Punkten und starren Körpern, sondern zieht auch elastische feste Körper, tropfbare Flüssigkeiten und Gase in den Bereich ihrer Untersuchung. Selbst hypothetische Medien wie der Äther der Physiker werden als imponderable Systeme nach den Prinzipien der Mechanik behandelt.

Die mechanischen Forschungsmethoden, mögen sie sich als Ziel nur die Beschreibung der Bewegungsvorgänge als solche setzen oder das Gleichgewicht von Kräften an einem wohl definierten System im Auge haben, oder endlich den Einfluß eines Kräftesystems an einem bereits in Bewegung

befindlichen materiellen System zu bestimmen suchen, stehen immer in einem gewissen Zusammenhang mit der naturwissenschaftlichen oder speziell technischen Erfahrung. Allerdings werden die Hilfsmittel der Geometrie und Analysis stets gebraucht, aber deshalb ist die Mechanik nicht als ein Zweig der Mathematik zu betrachten, sondern vielmehr als eine Wissenschaft, welche ihre Werkzeuge gleichzeitig der Mathematik und der Beobachtung, sowie dem zielbewußten Experiment verdankt.

Die Aufgabe der Mechanik besteht daher auch keineswegs in der Durchführung willkürlich aufgestellter Probleme, deren Zweck die Erlangung mathematischer Fertigkeit ist, sondern vielmehr in der richtigen Auffassung aller Systeme, deren Bewegung erforscht werden soll, in der klaren Erkenntnis der Kräftesysteme, welche auf das Objekt der Bewegung wirken und in dem Nachweis einer vernünftigen Übereinstimmung zwischen den Resultaten ihrer Untersuchung und den beobachtbaren Erscheinungen der Wirklichkeit.

2. Einteilung der Mechanik. Naturgemäß wird man das Objekt der Bewegung zunächst ins Auge fassen, also die Frage stellen, ob es einfach oder zusammengesetzt (vgl. Nr. 3) ist, ob es sich durch einen starren Körper oder ein System solcher Körper mit hinreichender Annäherung ersetzen läßt oder ob man es als ein Aggregat freier Punkte auffassen kann. Erst nachdem man die Natur des mechanischen Systems hinreichend erfaßt und damit der mathematischen Definition zugänglich gemacht hat, wird es möglich, die Erscheinungsformen seiner Bewegung im einzelnen zu untersuchen. Auf dieser Stufe der mechanischen Forschung können die Einwirkungen der Kräfte, welche den Bewegungszustand beeinflussen, noch außer acht gelassen werden. Mit Rücksicht auf diese willkürliche Beschränkung bezeichnet man jenen ersten Abschnitt in dem systematischen Lehrgebäude der Mechanik als Kinematik. Sie bildet die Grundlage für alle weitergehenden Untersuchungen, bei welchen die Kräfte in den Bereich der Betrachtung gezogen werden. Diese selbst sind Gegenstand des zweiten Hauptabschnittes der Mechanik, nämlich der Dynamik oder der Lehre von den Kräften und ihrem Verhalten bei den Zuständen des Gleichgewichtes und der Bewegung. Doch sind die Zwecke der Dynamik in der geschichtlichen Entwicklung der Mechanik schon überall maß-

gebend für die Begriffsbildungen der Kinematik gewesen, da die Trennung in systematischer Beziehung (Ampère) erst erfolgte, als unsere Wissenschaft bereits ein bedeutendes Maß der Ausbildung erreicht hatte.

Hertz hat in seinen „Prinzipien der Mechanik" 1894 (Gesammelte Werke Bd. 3) den Versuch durchgeführt, die Kräfte aus der Mechanik prinzipiell auszuschalten, so daß die Dynamik im engeren Sinne fortfällt. Im Grunde genommen ist dies jedoch nur eine andere Auffassung der althergebrachten Methoden der Mechanik und hat daher wenig oder gar keinen Einfluß auf die Behandlung realer Probleme.

3. Aufgabe der Kinematik. Das einfachste Objekt der reinen Bewegungslehre, der Punkt, bildet den Ausgang in der Entwicklung der Kinematik und damit auch wieder zugleich die Grundlage für alle weitergehenden Untersuchungen derselben. An dem geometrischen oder mit Masse behafteten Punkte werden zunächst die kinematischen Grundbegriffe, nämlich Geschwindigkeit und Beschleunigung definiert und dann erst auf ausgedehnte Körper (starre Systeme, Gelenksysteme, stetig veränderliche Materien) ausgedehnt und zu den sogenannten Systembegriffen weiterentwickelt. Insofern sich die Grundbegriffe der Geschwindigkeit und Beschleunigung nur auf einen Punkt beziehen, unterscheidet man sie nach Hertz von den Systembegriffen ausdrücklich als Elementarbegriffe der Kinematik und überträgt diese Terminologie auch auf alle aus Geschwindigkeit und Beschleunigung abgeleiteten Größen.

Wir rechnen auch die Masse zu den Grundbegriffen der Kinematik, da andernfalls eine vollständige[1]) Behandlung der Bewegungserscheinungen zusammengesetzter Systeme vom mechanischen Standpunkte aus nicht möglich ist. Die Bewegungslehre, soweit sie von dem Massenbegriff ganz unabhängig betrachtet wird, bezeichnet man am deutlichsten als geometrische Kinematik, da sie sich auf den homogenen Raum als Objekt der Bewegung und nicht unmittelbar auf physische Körper bezieht.

Als allgemeine Aufgabe der Kinematik betrachten wir hiernach erstens die Aufstellung und Verwertung der ele-

[1]) Die Bekanntschaft mit den angeführten Grundbegriffen wird hier vorausgesetzt, obwohl dieselben später im Zusammenhang unserer Darstellung systematisch behandelt werden.

mentaren Begriffe der Geschwindigkeit und der Beschleunigung und die Entwicklung der entsprechenden Systembegriffe mit Berücksichtigung der Massenverteilung in dem Gegenstand der Bewegung.

4. Behandlung kinematischer Probleme. Jede mechanische Aufgabe, wie sie die Physik oder die Technik stellt, verlangt zunächst eine kinematische Erfassung und Durchführung. Bei dieser Auffassung ist es vorteilhaft, zunächst von den in Lehrbüchern reproduzierten Übungsbeispielen einmal abzusehen. Man denke vielmehr an eine Problemstellung, die eine durchaus selbständige Durchführung erfordert. In dieser Lage waren ja auch einst alle diejenigen, welchen wir die Schöpfung der uns heute zu Gebote stehenden fertigen mechanischen Prinzipien und Methoden verdanken. In jeder Entwicklungsperiode der Mechanik waren natürlich die zur Lösung des Problems bereitstehenden Hilfsmittel (mathematische und empirische) von ganz bestimmt begrenztem Umfang und Wert. Wenn wir heute ein Problem scheinbar ohne kinematische Durchführung lösen, so ist dies uns nur möglich, weil ein anderer vorher diese notwendige Arbeit geleistet hat. Ist jedoch das Problem nach dieser Seite hin nicht behandelt oder, was viel häufiger vorkommt, für die aktuellen Bedürfnisse ungenügend durchgeführt, so muß die kinematische Behandlung mit den bereitliegenden Hilfsmitteln und auf dem üblichen oder einem teilweise neuen Wege in Angriff genommen werden. Blicken wir zunächst auf die vorhandenen mathematischen Hilfsmittel. Hier stehen uns die Methoden der Geometrie und der Analysis in ihrem unübersehbaren Umfange zur Verfügung. Aber welche Werkzeuge soll man aus dieser fast unermeßlichen Vorratkammer als die gerade passendsten herausgreifen? In einer günstigen Lage ist schon derjenige, dessen mathematische Kenntnisse so eng begrenzt sind, daß ihm die Wahl aus diesem Grunde nicht schwer wird, in der beneidenswertesten aber ist jener, welcher mit unbefangenem Blick stets auf den Gebrauchswert der einfachsten mathematischen Hilfsmittel hingeschaut hat und sich durch unablässige Anwendung dieser wenigen Werkzeuge gründlich geübt hat. Nur auf diesem Wege nähert er sich jenen Männern, welchen wir die entscheidenden Fortschritte auf theoretischem und praktischem Gebiete danken.

Immerhin ist es unmöglich, zu irgend einer Zeit genau festzustellen, welche mathematischen Hilfsmittel in eminentem Maße brauchbar sind und noch bedenklicher wäre es, diejenigen zu registrieren, welche dauernd als unbrauchbare zu bezeichnen wären. Die nachfolgenden engen Abgrenzungen sind daher nur als eine Abgrenzung des unbedingt Erforderlichen zu betrachten.

Von analytischen Kenntnissen genügt für das Studium der Kinematik, abgesehen von den auf der Mittelschule erworbenen Kenntnissen in der Elementarmathematik, die Fähigkeit einer geschickten Handhabung der Funktionen[1]) x^n, $\sin x$, $\cos x$, e^x und $\lg x$, sowie deren Differentiation und Integration. Hiermit ist man imstande die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\frac{d^2 y}{dx^2} + n^2 y = 0$ zu finden. Die einfachsten Aggregate der obengenannten Elementarfunktionen führen zur Taylorschen Reihe und den häufig gebrauchten trigonometrischen Reihen von der Form:

$$f(\vartheta) = b_0 + b_1 \cos\vartheta + b_2 \cos 2\vartheta + \ldots$$
$$+ c_1 \sin\vartheta + c_2 \sin 2\vartheta + \ldots$$

Ganz besonders sind die Methoden zur angenäherten Differentiation und Integration von Funktionen einzuüben, die durch eine endliche Anzahl diskreter Ordinaten gegeben sind. Man findet dieselben im Anhange zum II. Bande zusammengestellt, da sie eigentlich erst in der Dynamik gebraucht werden.

Die geometrischen Hilfsmittel sind mannigfacher als die rein analytischen. Hier ist vor allem eine gründliche Vertrautheit mit den elementarsten Sätzen der Raumgeometrie und der Lehre von den Kurven und Flächen im Raume erforderlich. In diesem Lehrbuche werden diese Kenntnisse jedoch nicht vorausgesetzt, sondern mit Benutzung der Vektorrechnung so weit entwickelt, als sie hier in Betracht kommen.

Die Hilfsmittel, welche die Beobachtung und das in bestimmter Richtung geleitete Experiment an die Hand geben, sind so eng mit der systematischen Darstellung der mecha-

---

[1]) Man vergleiche etwa Perrys „Calculus for Engeneers“, deutsch von Fricke und Süchting (Teubner 1902).

nischen Prinzipien mit Einschluß der Dynamik verknüpft, daß es unmöglich erscheint, hier schon einleitungsweise nähere Angaben zu machen. Es handelt sich dabei zunächst um die Bestimmung von Massen und Massenverteilungen, um die experimentelle Feststellung von Bahnen bewegter Punkte und die Abhängigkeit der Lagen von der Zeit, woraus sich dann der Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverlauf ableiten läßt. Die Feststellung von Schwerpunktslagen, Trägheitsachsen und der Größe der Trägheits- und Deviationsmomente durch Versuche kann erst in der Dynamik behandelt werden.

II. Das Operieren mit Vektoren.

5. Ursprung und Definition der Vektoren. Betrachten wir eine Strecke OA (Fig. 1) als den geradlinigen Weg eines Punktes, so können wir an diesem Gebilde notwendigerweise unterscheiden: 1. den Ausgangspunkt O, 2. die Richtung OA und 3. die Länge OA. Man bezeichnet nun jede Strecke im Raume, welche mit diesen drei Attributen behaftet ist, als einen Vektor im weiteren Sinne. Diese vollständige Auffassung der Streckengrößen ist im Prinzip so alt, daß man bestimmte historische Angaben über ihre erste Einführung kaum machen kann. Jedenfalls aber läßt sich mit Sicherheit feststellen, daß Leonhard Euler (1707—1783) eine analytisch vollständig ausgebildete Theorie[1]) der Vektoren besaß und in seinen Untersuchungen über die Bewegungen der starren Körper damit sehr zielbewußt operieren konnte. Als Bestimmungsstücke des Vektors OA wählt er meistens die rechtwinkligen Raumkoordinaten des Anfangspunktes O, ferner die Länge der Strecke OA und endlich die drei Winkel (α, β, γ), welche OA in seinem natürlichen Richtungssinne mit den Achsen eines vollständig festgelegten rechtwinkligen Koordinatenkreuzes (Fig. 2) einschließt. Da aber für diese Stellwinkel des Vektors zu den Achsen die Beziehung besteht:

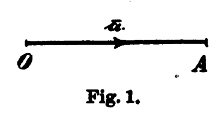


Fig. 1.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1\,,$$

[1]) Man vergleiche auch die Abhandlung von L. F. Meister „De genisi et affectative nibus figurarum planarum“, Novi Com. Gotting. Bd. 1 (1770).

so legt er den Vektor OA durch sechs voneinander unabhängige Bestimmungsstücke fest und rechnet damit nach den Regeln der Koordinatengeometrie.

In der Kinematik sind solche Vektoren im weiteren Sinne zunächst gegeben als Geschwindigkeiten oder Beschleunigungen eines Punktes, denen also auch in jedem Falle sechs unabhängige Bestimmungsstücke zukommen, wenn man die Betrachtung nicht auf die Ebene beschränkt. Clifford (Elements of Dynamic, 1878/87) bezeichnet solche Größen zur Unterscheidung von den gleich zu besprechenden Vektoren im engeren Sinne als Rotoren.

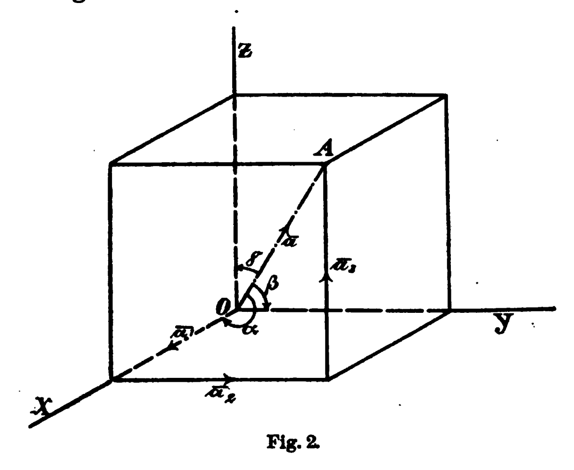


Fig. 2.

Die Geometer des neunzehnten Jahrhunderts — vor allen Hamilton (1812—1865) und Graßmann (1809 bis 1877) — haben die Eulersche Methode der Vektorrechnung, welche ganz auf dem Boden der analytischen Koordinatengeometrie stand und aus diesem Grunde auch keine besonderen mathematischen Algorithmen verlangte, prinzipiell verlassen und einen neuen Kalkul geschaffen, der das Operieren mit Vektoren ganz außerordentlich vereinfacht und es möglich macht, mit gerichteten Strecken ebenso anschaulich zu rechnen, wie es der unmittelbaren Konstruktion im Raume entspricht. Zu diesem Zwecke war aber eine — wenigstens vorläufige — Einschränkung des Vektorbegriffes notwendig. Man betrachtete nämlich zwei Vektoren OA, $O'A'$ schon dann

als einander völlig gleich, wenn sie bei gleicher Laufrichtung parallel und von gleicher absoluter Länge sind. Solche Vektoren im engeren Sinne lassen also eine beliebige Parallelverschiebung (Translation) zu, ohne daß ihre Gleichheit (Äquivalenz) aufgehoben würde. Auf sie allein beziehen sich die üblichen Methoden der elementaren Vektorrechnung, welche wir im folgenden in den Grundzügen darstellen.

6. Bezeichnung der Vektoren. Um eine gerichtete Strecke OA mit indifferentem Anfangspunkt O einschließlich ihrer eindeutigen Richtung und Länge zu bezeichnen, wählen wir mit Résal und Somoff, welche sich um die Darstellung der Kinematik so außerordentlich verdient gemacht haben, den kleinen lateinischen Buchstaben, welcher der Angabe des Endpunktes entspricht und versehen ihn mit einem übergesetzten horizontalen Strich, um einer Verwechselung mit der absoluten Länge vorzubeugen. Wir schreiben also

$$\bar{a} \text{ (lies } a \text{ Vektor)} = \text{Vektor } \overleftarrow{OA}.$$

Manche neuere Autoren wählen zur Auszeichnung der Vektorgrößen kleine gotische Buchstaben ($\mathfrak{a}$) und lassen dann den Strich fort. Dieser Gebrauch ist jedoch für das Schreiben unbequem und macht die Bezeichnung der Dimensionen (cf. Nr. 11), welche in der Mechanik dringend notwendig ist, unmöglich.

7. Geometrische Addition der Vektoren. Stevins Entdeckung des Parallelogramms der Kräfte ist die Quelle für diese Operation. Sie stützt sich auf folgende allgemeine Definition:

> *Umläuft man, von einem beliebigen Eckpunkte ausgehend, die aufeinanderfolgenden Seiten eines geschlossenen, von Vektoren gebildeten Raumpolygons derart, daß man alle Vektoren, welche in der Richtung ihres Pfeils durchschritten werden, positiv und diejenigen von entgegenstehendem Pfeil negativ rechnet, dann ist das Resultat dieser Operation, insofern sie als geometrische Addition aufgefaßt wird, gleich Null. Man überzeugt sich durch die Anschauung leicht, daß bei dieser Operation beliebige Vertauschung und Zusammenfassung der Summanden statthaft ist.*

Im einfachsten Falle des Dreiecks (Fig. 3), welches wir uns aus den Vektoren $\overline{OA} = \bar{a}$, $\overline{OB} = \bar{b}$, $\overline{OC} = \bar{c}$ durch

Parallelverschiebung von OB nach AC entstanden denken, ist also mit Beibehaltung des gewöhnlichen Additionszeichen (+) für die geometrische Addition

$$\bar{a} + \bar{b} + (-\bar{c}) = 0 \tag{1}$$

und analog in Fig. 4:

$$\bar{a} + (-\bar{b}) + (-\bar{c}) = 0\,. \tag{2}$$

Die Operation $+(-\bar{b})$ betrachten wir als geometrische Subtraktion und schreiben die Gleichungen (1) und (2) in der Form:

$$\bar{a} + \bar{b} - \bar{c} = 0\,,$$
$$\bar{a} - \bar{b} - \bar{c} = 0\,.$$

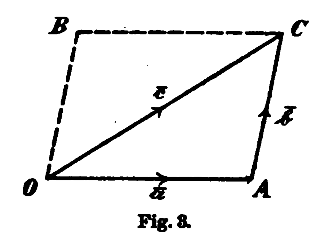


Fig. 3.

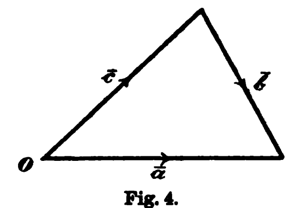


Fig. 4.

Hieraus folgern wir:

$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} \quad \text{und} \quad \bar{c} = \bar{a} - \bar{b}\,,$$

wofür man auch schreiben kann

$$\bar{c} = \overline{a + b} \quad \text{und} \quad \bar{c} = \overline{a - b}\,.$$

Satz. *Die geometrische Summe von zwei gerichteten Strecken ist auch gegeben durch die von dem gemeinsamen Anfangspunkte dieser Strecken ausgehende Diagonale des Parallelogramms aus den beiden Summanden.*

Allgemein gilt die Regel:

Um die geometrische Summe beliebig vieler Vektoren im Raume zu finden, trage man sie in beliebiger Reihenfolge ohne Richtungsänderungen je einen an den Endpunkt des andern und schließe die so erhaltene Raumfigur zu einem Polygon. Die Schlußstrecke — in dem umgekehrten Sinne der Aneinanderreihung genommen — ist die verlangte Summe.

Anmerkung. Für die Multiplikation einer Vektorsumme mit einer Zahl λ gilt die Regel

$$\lambda(\bar{a}+\bar{b}) = \lambda\cdot\bar{a}+\lambda\cdot\bar{b}\,.$$

Selbstverständlich kann man auch durch fortgesetzte Anwendung der Parallelogrammkonstruktion zu demselben Resultat kommen, doch ist dieser Weg weniger üblich als der erste.

Aus der geometrischen Anschauung folgt, daß die Relation

$$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\ldots+\bar{g}=0$$

auch noch gültig bleibt, wenn die Reihenfolge der Summanden vertauscht wird. Der Wert der Summe

$$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\ldots+\bar{h}$$

ist also unabhängig von der Anordnung und Zusammenfassung der Glieder, so daß, wie in der gewöhnlichen Arithmetik, das kommutative und assoziative Gesetz gilt. Diese Operationsgesetze bleiben auch für die Subtraktion bestehen.

Beispiel für die geometrische Addition: In Fig. 2 ist

$$\bar{a}_1+\bar{a}_2+\bar{a}_3-\bar{a}=0\,.$$

Also

$$\bar{a}=\bar{a}_1+\bar{a}_2+\bar{a}_3\,.$$

Satz. *Bei der Koordinatenauffassung ist der Vektor eines beliebigen Raumpunktes die geometrische Summe seiner Koordinaten, wenn die letzteren ebenfalls als gerichtete Strecken betrachtet werden.*

8. Der orientierte Winkel als Vektor. In der Kinematik — namentlich, wenn es sich um räumliche Untersuchung von Drehungen handelt — genügt es nicht, nur das Grad- oder Bogenmaß zu beachten. Es ist vielmehr durchaus nötig, auch auf die Laufrichtung des Bogens zu achten, welche die Lage des Winkels bestimmt. In Fig. 5 sei der Winkel zwischen den Vektoren $\bar{a}$ und $\bar{b}$ in dem Sinne genommen, daß man von dem Schenkel $\bar{a}$ zu dem Schenkel $\bar{b}$ übergeht. Wir schreiben

$$\sphericalangle AOB = (\bar{a}/\bar{b})$$

und schlagen um den Scheitel O den Bogen ED des Einheitskreises. Dieser Bogen ist das übliche analytische Maß des Winkels $(\bar{a}/\bar{b})$. Nun denken wir uns die Spitze eines

Korkziehers mit Rechtsgewinde in O so aufgesetzt (Fig. 6), daß sein Handgriff GH parallel zum Schenkel $\bar{a}$ steht und drehen nach $\bar{b}$ hin, indem wir den Winkel $(\bar{a}/\bar{b})$ beschreiben. Das Gewinde wird hierbei aus einer feststehenden Umhüllung nach oben bewegt. Diesen Vorstellungen entsprechend tragen wir auf der Normalen der Ebene OAB in O die Strecke $OC = \operatorname{arc}(\bar{a}/\bar{b})$ in einer willkürlichen Längeneinheit auf und nennen den nach dieser Regel konstruierten Vektor $\bar{c}$ den Vektor des Winkels $(\bar{a}/\bar{b})$. Würde man den Korkzieher von

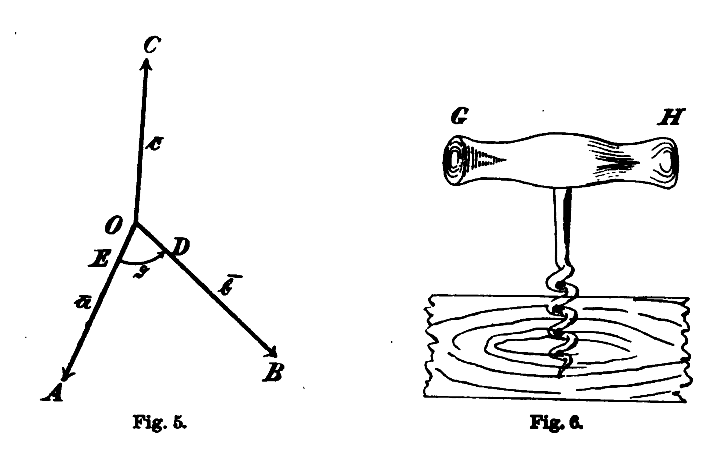


Fig. 5. Fig. 6.

unten mit seiner Spitze in O aufgesetzt haben, so würde die Drehung von $(\bar{a}/\bar{b})$ wieder genau die vorher gewonnene Strecke OC ergeben haben. Die Korkzieherregel ist also ganz unabhängig von der Seite der Ebene, auf welcher man die oben definierte Vorzeichenoperation ausführt. Dagegen folgt aus derselben ohne weiteres, daß wir bei dieser vektoriellen Auffassung des Winkels

$$(\bar{a}/\bar{b}) = -(\bar{b}/\bar{a})$$

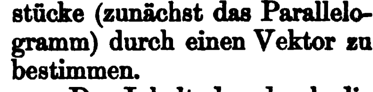
setzen müssen. Wir lesen $(\bar{a}/\bar{b})$: Winkel a Vektor gegen b Vektor.

Anmerkung. Für das numerische Rechnen beachte man die Beziehung

$$\lg \operatorname{arc} \vartheta = \lg \vartheta^0 + 8{,}242\,(-10)\,.$$

+ Colog 57.3 − 10

9. Das im Raume orientierte Parallelogramm. Der Begriff der Flächengeschwindigkeit geht auf Kepler (1571—1630) zurück, welcher mit Hilfe derselben sein zweites Gesetz der Planetenbewegung ausgedrückt hat. Diese fundamentale Vorstellung nötigt uns, in der Kinematik auch ebene Flächen-



stücke (zunächst das Parallelogramm) durch einen Vektor zu bestimmen.

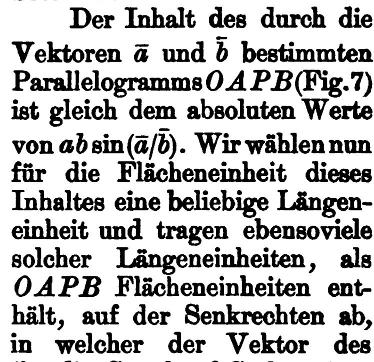
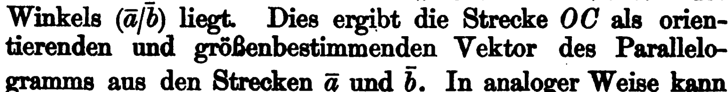


Fig. 7.

Der Inhalt des durch die Vektoren $\bar{a}$ und $\bar{b}$ bestimmten Parallelogramms $OAPB$ (Fig. 7) ist gleich dem absoluten Werte von $ab \sin(\bar{a}/\bar{b})$. Wir wählen nun für die Flächeneinheit dieses Inhaltes eine beliebige Längeneinheit und tragen ebensoviele solcher Längeneinheiten, als $OAPB$ Flächeneinheiten enthält, auf der Senkrechten ab, in welcher der Vektor des Winkels $(\bar{a}/\bar{b})$ liegt. Dies ergibt die Strecke OC als orientierenden und größenbestimmenden Vektor des Parallelogramms aus den Strecken $\bar{a}$ und $\bar{b}$. In analoger Weise kann



man jede ebene Fläche im Raume durch einen Vektor darstellen.

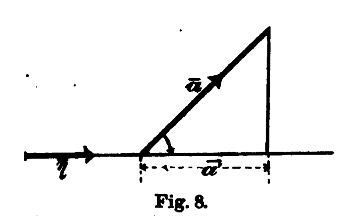


Fig. 8.

Man beachte, daß der Vektor des Parallelogramms mit dem Winkel $(\bar{b}/\bar{a})$ entgegengesetzt gleich dem vorigen ist. Zur Orientierung eines Parallelogramms bedarf es also noch einer Festsetzung der Reihenfolge der dasselbe bestimmenden Vektoren, wie sie auch bei der Anschauung einer von einem Vektor überstrichenen Fläche naturgemäß gegeben ist.

10. Die Projektion eines Vektors. Eine gerichtete gerade Linie (Achse) im Raume bezeichnet man am bequemsten durch einen Einheitsvektor, weil es hier auf die Länge nicht ankommt. Hiernach ist die Projektion a' (Fig. 8) des Vektors $\bar{a}$ auf die Achse $\bar{\eta}$ bestimmt durch die Gleichung

$$a' = a \cos(\bar{a}/\bar{\eta})$$

oder wenn man gelegentlich auch die Richtung der Projektion andeuten will:

$$\bar{a}' = a \cos(\bar{a}/\bar{\eta}) \cdot \bar{\eta}\,.$$

11. Bezeichnung der geometrischen Dimensionen. Zahlen gibt man die nullte Dimension, Strecken die erste und Flächeninhalten die zweite Dimension. Zur Unterscheidung derselben benutzen wir fortan beziehungsweise das kleine griechische, das kleine lateinische und das große lateinische Alphabet. In der Kinematik treten zu den rein geometrischen Größen noch die Zeit und die Masse. Den letzteren geben wir bei ihrer Einführung die nullte Dimension, betrachten sie demnach als Größen, welche mit Zahlen gleichartig sind. Durch diese Festsetzungen wird es möglich, alle Gleichungen der Mechanik in geometrischem Sinne homogen zu schreiben, was schon von Culmann (Graphische Statik, 1866) als außerordentlich wünschenswert hingestellt wurde, wenn er auch an der wirklichen Ausführbarkeit zweifelte. Einheitsvektoren betrachten wir gleichfalls als Zahlen, da sie durch Division eines gegebenen Vektors durch seinen absoluten Betrag entstehen. Wir schreiben also im folgenden:

$$\frac{\bar{a}}{a} = \bar{\alpha}\,, \quad \frac{\bar{F}}{F} = \bar{\varphi}\,,$$

je nachdem es sich um eine gerichtete Strecke ($\bar{a}$) oder eine orientierte Fläche ($\bar{F}$) handelt.

Die Wahl der Bezeichnung für Größen anderer Dimensionen wird an der Stelle ihrer Einführung getroffen.

12. Das Arbeitsprodukt [inneres Produkt[1])] zweier Vektoren. Projiziert man von zwei gegebenen Vektoren $\bar{a}$ und $\bar{b}$ den ersten auf den zweiten, dann ist

$$a' = a \cos(\bar{a}/\bar{b})\,.$$

Ebenso wird

$$b' = b \cos(\bar{a}/\bar{b})\,,$$

da der Kosinus gegen das Vorzeichen des Winkels unempfindlich ist. Der gemeinschaftliche Wert der Produkte $a b'$ und $b a'$, nämlich $ab \cos(\bar{a}/\bar{b})$, spielt nun seit Galilei eine

[1]) Diese jetzt sehr gebräuchliche Bezeichnung deckt sich nicht vollständig mit der Graßmannschen Auffassung und Definition.

ganz fundamentale Rolle in der Mechanik, indem er die Arbeit der konstanten Kraft $\bar{a}$ darstellt (Fig. 9), welche geleistet wird, sobald ihr Angriffspunkt die Wegstrecke $OB = \bar{b}$ in Parallelbewegung durchläuft. Dies ist zwar eine dynamische Vorstellung, aber für die Kinematik von gleicher Wichtigkeit wie für die Statik.

Das Rechteck $OBCA = ab\cos(\bar{a}/\bar{b})$ ist ein Maß für die auf die beschriebene Weise geleistete Arbeit, welche durch die beiden vektoriellen Faktoren $\bar{a}$ (Kraft) und $\bar{b}$ (Weg des Angriffspunktes) definiert ist. Wir nennen es deshalb das „Arbeitsprodukt“ der Vektoren $\bar{a}$ und $\bar{b}$. Zuweilen gebrauchen wir auch die Bezeichnung „inneres Produkt“.

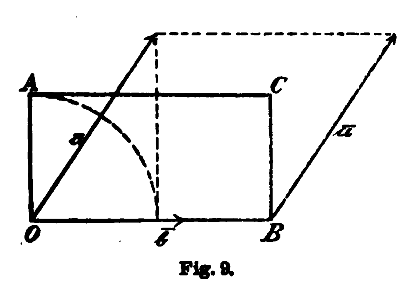


Fig. 9.

Definition. *Unter dem Arbeitsprodukt (inneren Produkt) zweier Vektoren versteht man das arithmetische Produkt ihrer Längen multipliziert in den Kosinus des Zwischenwinkels.*

Das Arbeitsprodukt ist eine ungerichtete Größe. Wir bezeichnen es durch das Symbol $\bar{a}\bar{b}$ und sprechen a Vektor in b Vektor. Es ist

$$\bar{a}\bar{b} = ab\cos(\bar{a}/\bar{b}) = \bar{b}\bar{a}\,.$$

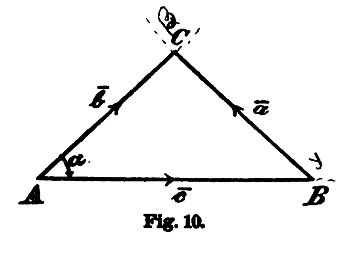


Fig. 10.

Ferner ist

$$\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}$$

in Übereinstimmung mit der entsprechenden arithmetischen Regel.

Aufgabe 1. Man beweise die Gültigkeit der durch die Gleichung

$$\bar{a} \cdot \overline{b + c} = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}$$

ausgedrückten Rechnungsregel (distributives Gesetz).

13. Anwendung auf die ebene Trigonometrie. In dem Dreieck ABC (Fig. 10) ist

$$\bar{c} + \bar{a} - \bar{b} = 0\,.$$

Folglich
$$\bar{a} = \bar{b} - c\,.$$
Hieraus bilden wir nun
$$\bar{a}\,\bar{a} = (\bar{b} - \bar{c})(\bar{b} - \bar{c}) = \bar{b}\,\bar{b} - \bar{b}\,\bar{c} - \bar{c}\,\bar{b} + \bar{c}\,\bar{c}\,,$$
d. h.
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha\,.$$

14. Anwendung auf die Koordinatengeometrie. Es seien zwei Vektoren $\bar{a}$ und $\bar{b}$ nach demselben rechtwinkligen Achsenkreuz (1, 2, 3) zerlegt, dann ist nach Nr. 7:
$$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 \quad \text{und} \quad \bar{b} = \bar{b}_1 + \bar{b}_2 + \bar{b}_3\,.$$
Also wird ihr Arbeitsprodukt
$$ab\cos(\bar{a}/\bar{b}) = \bar{a}\bar{b} = \overline{(a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3)} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3\,,$$
da $\bar{a}_1 \bar{b}_2$, $\bar{a}_1 \bar{b}_3$ usw. verschwinden, indem der Kosinus des Zwischenwinkels Null wird. Für $\bar{b} = \bar{a}$ erhält man:
$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\,.$$

Aufgabe 2. Man entwickle die Formel für $\cos(\bar{a}/\bar{b})$ unter Voraussetzung eines schiefwinkligen Achsenkreuzes.

Aufgabe 3. Zwei Vektoren $\bar{a}$ und $\bar{b}$ sind durch ihre rechtwinkligen Komponenten $(a_1 = 4,\ a_2 = -2,\ a_3 = 3)$, $(b_1 = -7,\ b_2 = 9,\ b_3 = -5)$ gegeben. Ihr Arbeitsprodukt soll numerisch berechnet werden.

Aufgabe 4. Wann stehen die Vektoren $\bar{a}$ und $\bar{b}$ aufeinander senkrecht?

Aufgabe 5. Warum gilt die in Nr. 13 gegebene Ableitung des allgemeinen Pythagoreischen Lehrsatzes auch ohne weiteres für stumpfwinklige Dreiecke?

15. Das Momentprodukt (äußere Produkt) zweier Vektoren. Der Begriff des Momentes einer Kraft wurde von Archimedes beim Hebelgesetz eingeführt. Seine vollständige Definition verlangt die Berücksichtigung des Richtungssinnes der Hebelarme und der Kräfte. Wir wollen annehmen, der geradlinige Hebel AB sei in dem Punkte C unterstützt. In den Endpunkten A und B sollen senkrecht zu den Hebelarmen CA und CB die Kräfte p und q wirken. Für das Gleichgewicht gilt dann die bekannte Beziehung
$$ap = bq\,.$$

Wir wollen nun den Größen a, b, p, q die in der Figur angedeuteten Richtungen beilegen und die Rechtecke $CADG$ und $CBEF$ nach Nr. 9 derartig durch ihre Vektoren orientieren, daß wir die Winkel $(\bar{a}/\bar{p})$ und $(\bar{b}/\bar{q})$ zugrunde legen. Der erste Vektor ist in bezug auf die Ebene der Figur von vorn nach hinten gerichtet, der zweite umgekehrt. Wir fassen dieselben als die — Größe und Richtung ausdrückenden — Momente der betreffenden Kräfte und ihrer Hebelarme auf und erhalten das elementare Hebelgesetz in dem Satze ausgedrückt:

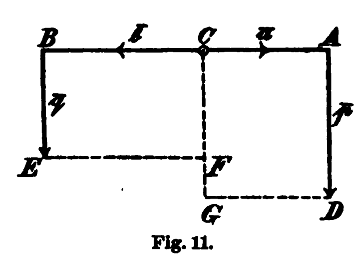


Fig. 11.

Das Moment des ersten Hebelarms und der zugehörigen Kraft ist im Gleichgewichtsfalle entgegengesetzt gleich dem Moment des zweiten Hebelarms und der hier angreifenden Kraft.

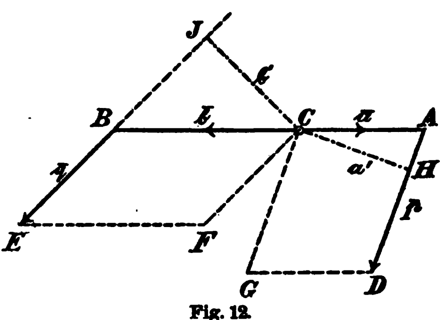


Fig. 12.

In dieser vollständig definierten (d. h. vektoriellen) Form treten die Momente zuerst in den fast gleichzeitigen Arbeiten von D'Alembert und Euler über die Rotation des starren Körpers auf. In diesen kommt auch die kinematische Bedeutung des Momentbegriffes bereits zur vollen Geltung.

Die Übertragung des Hebelgesetzes auf schräg wirkende Kräfte (Fig. 12) ändert an dem Ausdruck der Gleichgewichtsrelation gar nichts. Denn die Hebelarme sind jetzt die Lote $CH = a'$ und $CJ = b'$ auf die Kraftrichtungen und es wird im Gleichgewichtsfalle

$$a'p = b'q\,.$$

Folglich müssen die Parallelogramme $CBEF$ und $CADG$ flächengleich sein. Orientieren wir wieder das erste nach dem Winkel $(\bar{b}/\bar{q})$ und das zweite nach dem Winkel $(\bar{a}/\bar{p})$, so sind ihre Vektoren, wie im obigen speziellen Falle, entgegengesetzt gleich. Die Summe der Momente ist also auch hier gleich Null.

Man erkennt hieraus, daß die Orientierung des im bestimmten Winkelsinne aufgefaßten Parallelogramms eine fundamentale längst bekannte Begriffsbildung und Operation der Mechanik ist, deren einschneidende Bedeutung eigentlich schon Galilei erkannt hatte, ohne jedoch zu einer vollständigen Formulierung zu gelangen. Erst Hamilton und Graßmann sind fast gleichzeitig zur algorithmischen Bezeichnung dieser wichtigen Operation vorgegangen. Wir bezeichnen den nach der Korkzieherregel konstruierten Vektor des Parallelogramms mit dem Winkel $(\bar{a}/\bar{b})$ durch das Symbol $\overline{ab}$ und lesen „a über b Vektor". Es ist für uns der Ausdruck des „Momentproduktes" von $\bar{a}$ gegen $\bar{b}$. Graßmann nennt diese Größe die Ergänzung des äußeren Produktes der Vektoren $\bar{a}$ und $\bar{b}$.

Aus Nr. 9 folgt sofort

$$\overline{ba} = -\overline{ab}\,.$$

Das Momentprodukt folgt nur dem kommutativen Gesetz der gewöhnlichen Arithmetik, wenn man gleichzeitig mit der Vertauschung der beiden Faktoren das Vorzeichen des Ausdruckes umkehrt.

Wir setzen nun

$$\bar{C} = \overline{ab}$$

und erhalten (Nr. 9) die absolute Größe von $\bar{C}$ durch die Gleichung

$$C = ab\sin(\bar{a}/\bar{b})\,.$$

Hieraus folgt noch unmittelbar:

$$\overline{aa} = 0\,.$$

Unter Beachtung dieser wesentlichen Eigenschaften des Momentproduktes gelten für die Operation in Verbindung mit der geometrischen Addition die gewöhnlichen Regeln der

Arithmetik, doch hat man bis auf weiteres (vgl. Nr. 177) die Division durch einen Vektor zu vermeiden. Es ist nämlich:

$$\overline{a(b+c)} = \overline{ab} + \overline{ac}\,,$$

$$\overline{(a+b)(c+d)} = \overline{ac} + \overline{ad} + \overline{bc} + \overline{bd}$$

$$\overline{a(a+b)} = \overline{ab}$$

$$\overline{a(a-b)} = \overline{ba}\,.$$

$$\bar{a}\bar{b} = \alpha\beta \cdot \bar{m}\bar{n}$$

und

$$\overline{ab} = \alpha\beta \cdot \overline{mn}\,,$$

wenn

$$\bar{a} = \alpha \cdot \bar{m}$$

$$\bar{b} = \beta \cdot \bar{n} \quad \text{ist.}$$

16. Die Komponenten des Momentproduktes in der Koordinatengeometrie. Sind $\bar{a}$ und $\bar{b}$ gegebene Strecken, so wird ihr Momentprodukt selbstverständlich ein Vektor von der zweiten Dimension. Wir müssen demnach schreiben:

$$\overline{ab} = \bar{C}\,.$$

Wenn wir eine beliebige Längeneinheit e für die Auftragung des Momentvektors im Sinne von Nr. 9 wählen, dann wird

$$\bar{C} = e \cdot \bar{c}$$

und $\bar{c}$ ist der lineäre Repräsentant des Flächenvektors $\overline{ab}$.

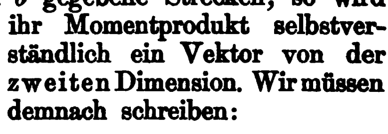


Fig. 13.

In der Algebra der Vektoren setzt man meistens $e = 1$ und schreibt ohne Rücksicht auf die Homogenität

$$\overline{ab} = \bar{c}\,,$$

da man den ausgelassenen Faktor e jederzeit wieder an seine Stelle setzen kann (Fig. 13).

Wir zerlegen nun die drei Vektoren $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ in Komponenten nach demselben rechtwinkligen Achsenkreuz (1, 2, 3) und haben dementsprechend:

$$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3\,, \quad \bar{b} = \bar{b}_1 + \bar{b}_2 + \bar{b}_3\,.$$

Folglich

$$\begin{aligned}\bar{c}_1 + \bar{c}_2 + \bar{c}_3 &= \overline{(a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3)}\\ &= \overline{a_1 b_1} + \overline{a_1 b_2} + \overline{a_1 b_3}\\ &+ \overline{a_2 b_1} + \overline{a_2 b_2} + \overline{a_2 b_3}\\ &+ \overline{a_3 b_1} + \overline{a_3 b_2} + \overline{a_3 b_3}\,.\end{aligned}$$

Nun ist aber nach der Definition des Momentproduktes

$$\overline{a_1 b_1} = \overline{a_2 b_2} = \overline{a_3 b_3} = 0\,,$$

da hier der Richtungsunterschied fehlt.

Mithin wird:

$$\bar{c}_1 + \bar{c}_2 + \bar{c}_3 = (\overline{a_2 b_3} + \overline{a_3 b_2}) + (\overline{a_3 b_1} + \overline{a_1 b_3}) + (\overline{a_1 b_2} + \overline{a_1 b_1})\,.$$

Die Benutzung der Korkzieherregel ergibt, daß

1. $\overline{a_2 b_3}$ und $-\overline{a_3 b_2}$ gleichgerichtet sind mit $\bar{c}_1$
2. $\overline{a_3 b_1}$ und $-\overline{a_1 b_3}$ gleichgerichtet sind mit $\bar{c}_2$

und 3. $\overline{a_1 b_2}$ und $-\overline{a_2 b_1}$ gleichgerichtet sind mit $\bar{c}_3$.

Folglich wird

$$\begin{aligned}c_1 &= a_2 b_3 - a_3 b_2\\ c_2 &= a_3 b_1 - a_1 b_3\\ c_3 &= a_1 b_2 - a_2 b_1\,,\end{aligned}$$

denn zwei gleiche Vektoren haben in bezug auf dieselben Zerlegungsachsen auch entsprechend gleiche Komponenten.

Aus

$$c^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$$

schließt man

$$\sin(\bar{a}/\bar{b}) = \frac{\sqrt{(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

eine Formel, die man neben (vgl. Nr. 14)

$$\cos(\bar{a}/\bar{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

häufig anzuwenden hat, wenn die Komponenten gegeben sind.

Aufgabe 6. Nach den Daten der Aufgabe 3 berechne man die Koordinaten für den Endpunkt des Momentvektors zu den Vektoren $\bar{a}$ und $\bar{b}$.

Aufgabe 7. Man berechne den Winkel $(\bar{a}/\bar{b})$ aus der trigonometrischen Tangente.

Aufgabe 8. $\bar{\varepsilon}$ und $\bar{\eta}$ sind zwei gegebene Einheitsvektoren, welche der Bedingung $\overline{\varepsilon\eta} = 0$ genügen. Man zeige, daß jeder Punkt des Raumes durch einen Vektor von der Form $\bar{x} = a \cdot \bar{\varepsilon} + b \cdot \bar{\eta} + c \cdot \overline{\varepsilon\eta}$ dargestellt werden kann, wo a, b, c ungerichtete Strecken mit Vorzeichen bedeuten. Welches sind die rechtwinkligen Koordinaten dieses Punktes $(\bar{x})$, wenn $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\eta}$ und $\overline{\varepsilon\eta}$ die positiven Richtungen des Achsenkreuzes anzeigen?

17. Die Gleichung des Kreises (und der Ellipse) in der Ebene.

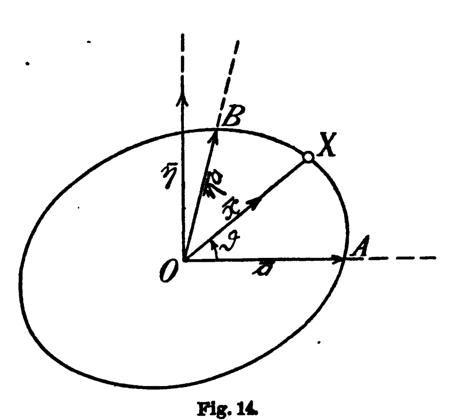


Fig. 14.

In dem Kreis ziehen wir einen festen Radius $OA = \bar{a}$ und errichten im Mittelpunkt O eine Senkrechte nach oben gleich dem Einheitsvektor $\bar{\eta}$. Dann steht $OB = \overline{\eta a}$ senkrecht auf $\bar{a}$. Der Vektor $\bar{x}$ sei vom Mittelpunkt O nach dem laufenden Punkte X auf der Peripherie gezogen, so daß $\bar{x}$ mit $\bar{a}$ den Winkel ϑ einschließt. Die gerichteten Projektionen von $\bar{x}$ auf die Achsen $\bar{a}$ und $\overline{\eta a}$ seien $\bar{x}_1$ und $\bar{x}_2$. Dann wird

$$\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 ,$$

worin

$$\bar{x}_1 = \bar{a} \cos\vartheta , \quad \bar{x}_2 = \overline{\eta a} \sin\vartheta$$

zu nehmen ist. Die Parameter(ϑ)-Gleichung des Kreises wird also

$$\bar{x} = \bar{a} \cdot \cos\vartheta + \overline{\eta a} \cdot \sin\vartheta ,$$

wo $\eta^2 = 1$ ist. Macht man dagegen die Annahme $\eta^2 \gtrless 1$, so stellt dieselbe Gleichung eine Ellipse dar, wie man ohne weiteres erkennt.

Aufgabe 9. Mit Benutzung der hyperbolischen Funktionen $\cosh\vartheta$ und $\sinh\vartheta$ soll die Parametergleichung der Hyperbel aufgestellt werden, welche der obigen Kreisgleichung genau analog ist.

18. Die Vertauschungsformel. Wir betrachten den Ausdruck

$$\Delta = \bar{a}\,\overline{b\,c}\,,$$

welcher das Arbeitsprodukt aus einem einfachen Vektor $\bar{a}$ und dem Momentprodukt $\overline{b\,c}$ darstellt. Setzt man zur Abkürzung

$$\overline{b\,c} = \bar{D}$$

und zerlegt alle Vektoren in Komponenten nach einem rechtwinkligen Achsenkreuz (1, 2, 3), so wird zunächst

$$\Delta = a_1 D_1 + a_2 D_2 + a_3 D_3$$

und durch weitere Ausführung:

$$\Delta = a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2 (b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)\,.$$

Die Umordnung dieses Ausdruckes ergibt auch:

$$\Delta = b_1 (c_2 a_3 - c_3 a_2) + b_2 (c_3 a_1 - c_1 a_3) + b_3 (b_1 a_2 - c_2 a_1)$$

und

$$\Delta = c_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + c_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + c_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,.$$

Für den Ausdruck Δ gilt also die „Vertauschungsformel“:

$$\bar{a}\,\overline{b\,c} = \bar{b}\,\overline{c\,a} = \bar{c}\,\overline{a\,b}\,,$$

die sehr häufig Anwendung findet.

Aufgabe 10. Man zeige aus einer Figur, daß $\Delta = \bar{a}\,\overline{b\,c}$ den Rauminhalt eines Parallelepipeds mit den anstoßenden Kanten $\bar{a}$, $\bar{b}$ und $\bar{c}$ darstellt. Hieraus ergibt sich dann die Richtigkeit der Vertauschungsformel unmittelbar, soweit die absoluten Werte in Betracht kommen. Wie steht es mit dem Vorzeichen?

19. Die Entwicklungsformel. Bezeichnen wir wieder mit e eine feste (aber beliebige) Längeneinheit und betrachten den Vektor $\bar{x}$, welcher durch die Gleichung

$$e^2 \cdot \bar{x} = \overline{a(\overline{b\,c})}$$

bestimmt ist. Aus der Definition des Momentproduktes folgt sofort, daß $\bar{x}$ sowohl auf $\bar{a}$ als auch auf $\overline{b\,c}$ senkrecht steht: $\bar{D} = \overline{b\,c}$ steht aber selbst senkrecht auf $\bar{b}$ und $\bar{c}$. Folglich

muß $\bar{x}$ in einer Ebene liegen, die durch die Vektoren $\bar{b}$ und $\bar{c}$ bestimmt ist. Ein solcher Vektor hat immer die Form

$$\bar{x} = \beta \cdot \bar{b} + \gamma \cdot \bar{c}\,,$$

wo β und γ Zahlfaktoren bedeuten. Wir bestimmen γ und β direkt nach der wiederholt angewandten Komponentenmethode, indem wir

$$\bar{D} = \bar{D}_1 + \bar{D}_2 + \bar{D}_3$$

Fig. 15.

setzen. Dann ist zunächst

$$\begin{aligned}
e^2 \cdot x_1 &= a_2 D_3 - a_3 D_2 = a_2(b_1 c_2 - b_2 c_1) - a_3(b_3 c_1 - b_1 c_3)\\
e^2 \cdot x_2 &= a_3 D_1 - a_1 D_3 = a_3(b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_1(b_1 c_2 - b_2 c_1)\\
e^2 \cdot x_3 &= a_1 D_2 - a_2 D_1 = a_1(b_3 c_1 - b_1 c_3) - a_2(b_2 c_3 - b_3 c_2)\,.
\end{aligned}$$

Da

$$x_1 = \beta \cdot b_1 + \gamma \cdot c_1$$

sein muß, so schreiben wir

$$e^2 \cdot x_1 = (a_2 c_2 + a_3 c_3) \cdot b_1 - (a_2 b_2 + a_3 b_3) \cdot c_1$$

oder

$$e^2 \cdot x_1 = (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) \cdot b_1 - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \cdot c_1\,.$$

Man erhält also

$$e^2 \cdot x_1 = (\bar{a}\,\bar{c}) \cdot b_1 - (\bar{a}\,\bar{b}) \cdot c_1$$

und analog

$$e^2 \cdot x_2 = (\bar{a}\,\bar{c}) \cdot b_2 - (\bar{a}\,\bar{b}) \cdot c_2\,,$$

$$e^2 \cdot x_3 = (\bar{a}\,\bar{c}) \cdot b_3 - (\bar{a}\,\bar{b}) \cdot c_3\,,$$

das heißt

$$e^2 \cdot \bar{x} = (\bar{a}\,\bar{c}) \cdot \bar{b} - (\bar{a}\,\bar{b}) \cdot \bar{c}\,.$$

Die abgeleitete Gleichung

$$\overline{a(b\,c)} = (\bar{a}\,\bar{c}) \cdot \bar{b} - (\bar{a}\,\bar{b}) \cdot \bar{c}$$

bezeichnen wir im folgenden als „Entwicklungsformel“ des dreigliedrigen Vektorproduktes.

Aufgabe 11. Man beweise die Richtigkeit der zyklischen Relation

$$\overline{a(b\,c)} + \overline{b(c\,a)} + \overline{c(a\,b)} = 0$$

durch Anwendung der Entwicklungsformel und Ausführung der geometrischen Addition.

Anmerkung. Sowohl der Vertauschungssatz als die Entwicklungsformel werden so häufig angewendet, daß es unnötig ist, hier auf bestimmte Fälle hinzuweisen.

Aufgabe 12. Die Vektoren $\bar{b}$ und $\bar{c}$ seien gegeben durch ihre Komponenten $b_1 = 5$, $b_2 = 2$, $b_3 = -1{,}5$ und $c_1 = 7$, $c_2 = 4{,}3$, $c_3 = 1{,}2$, ebenso der Vektor $\bar{a}$ durch $a_1 = 2{,}1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5{,}2$. Es sollen die Winkel $(\bar{x}/\bar{b})$ und $(\bar{x}/\bar{c})$ berechnet werden. Ferner ist die Länge von $\bar{x}$ (also x selbst) für $e = 6$ zu bestimmen.

Aufgabe 13. Man beweise mit Benutzung des Vertauschungs- und des Entwicklungssatzes die Richtigkeit der Formel

$$\overline{a\,b} \cdot \overline{c\,d} = (\bar{a}\,\bar{c})(\bar{b}\,\bar{d}) - (\bar{b}\,\bar{c})(\bar{a}\,\bar{d}) .$$

Welche Bedeutung hat diese Formel in der sphärischen Trigonometrie, wenn man speziell für $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ Einheitsvektoren nimmt und das sphärische Viereck betrachtet, das von ihren Endpunkten gebildet wird? (Satz von Gauß.)

III. Anwendungen auf die Grundgebilde der Raumgeometrie.

20. Die Gleichung der Ebene. Zunächst nehmen wir an, die Ebene (Fig. 16) gehe durch den Punkt O' und enthalte die Vektoren $O'B = \bar{b}$ und $O'C = \bar{c}$. Den laufenden Punkt in derselben nennen wir X und setzen $O'X = \bar{z}$. Dann ist

$$\bar{z} = \beta \cdot \bar{b} + \gamma \cdot \bar{c} ,$$

worin β und γ mit X variabel sind. Der feste Bezugspunkt im Raume sei O und $OO' = \bar{a}$. Aus dem Dreieck OXO' folgt $\bar{x} - \bar{z} - \bar{a} = 0$, d. h.

$$\bar{x} = \bar{a} + \bar{z} .$$

Hiernach wird die Gleichung der Ebene

$$\bar{x} = \bar{a} + \beta \cdot \bar{b} + \gamma \cdot \bar{c} .$$

Jedem definiten Wertepaar (β, γ) entspricht ein bestimmter Punkt der Ebene. Wir haben also die sogenannte Parameterdarstellung der Ebene im Raume gewonnen.

Gebräuchlicher ist die Normalgleichung der Ebene, welche durch Betrachtung von Fig. 17 folgt. Man fällt von dem festen Bezugspunkte O im Raume ein Lot $ON = \bar{n}$ auf die Ebene und zieht von N einen vorwärts gerichteten Vektor nach dem laufenden Punkte X. Sein Vektor OX wird gleich x gesetzt. Nun steht jedenfalls $NX = \overline{x - n}$ senkrecht auf $\bar{n}$. Folglich ist

$$\bar{n}\,\overline{x - n} = 0$$

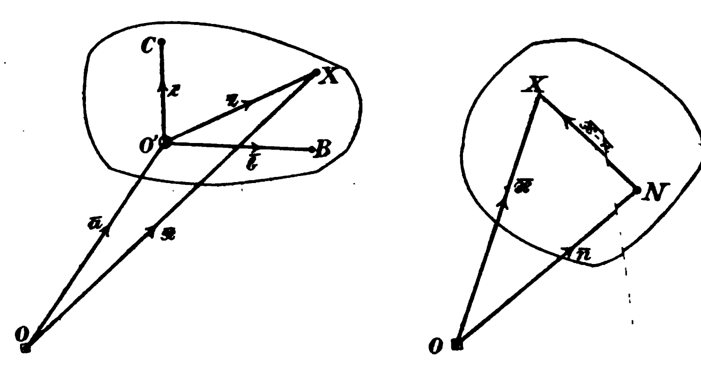


Fig. 16. Fig. 17.

die Gleichung der Ebene. Um die übliche Normalform daraus zu gewinnen, führen wir die Multiplikation aus und erhalten

$$\bar{n}\,\bar{x} = n^2 .$$

Jetzt führen wir einen Einheitsvektor $\bar{\nu}$ auf der Normalen durch die Beziehung $\bar{n} = n \cdot \bar{\nu}$ ein und erhalten

$$\bar{\nu}\,\bar{x} = n \quad \text{oder} \quad \nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \nu_3 x_3 = n$$

also die bekannte Gleichung der analytischen Geometrie. Für uns ist jedoch die vektorielle Form $\bar{\nu}\,\bar{x} = n$ bequemer und übersichtlicher.

Aufgabe 14. Es sind drei Punkte ABC durch ihre Vektoren $OA = \bar{a}$, $OB = \bar{b}$ und $OC = \bar{c}$ gegeben. Man soll die vektorielle Gleichung der durchgehenden Ebene aufstellen. Vgl. Fig. 18.

Aufgabe 15. Welches Gebilde stellt die Gesamtheit der Vektoren $\overline{x(bc)}$ dar, wenn $\bar{x}$ ein variabler Vektor ist?

Aufgabe 16. Welche geometrische Bedeutung hat der Ausdruck $\bar{\nu}\bar{x}_1 - n$, wenn der Endpunkt von $\bar{x}_1$ nicht in der Ebene $\bar{\nu}\bar{x} = n$ liegt.?

Aufgabe 17. Eine Ebene ist durch $ON = \bar{n}$ orientiert. In derselben liegt der Punkt C, so daß $OC = \bar{c}$ gesetzt ist. Ferner sei innerhalb der Ebene $CA = \bar{a}$ gezogen. Welches ist die Parametergleichung des Kreises mit dem Radius a um den Punkt C, wenn der Winkel ϑ von dem Vektor $\overline{CA}$ aus gezählt wird?

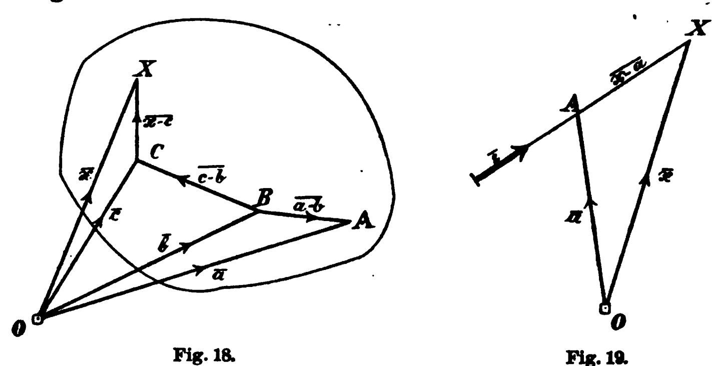


Fig. 18. Fig. 19.

21. Die Gleichung der Geraden im Raum. Wir nehmen in der gegebenen Geraden einen festen Punkt A und einen laufenden Punkt X an (Fig. 19). Die Richtung der Geraden sei durch den Einheitsvektor $\bar{\varepsilon}$ festgelegt. Da die Strecke $AX = \overline{x - a}$ mit diesem Einheitsvektor keinen Richtungsunterschied hat, so ergibt sich sofort die Gleichung der Geraden in der Form

$$\overline{\varepsilon(x - a)} = 0 .$$

Anmerkung. In der Mechanik tritt die Gleichung der Geraden zuweilen in der Form

(a) $$\overline{\varepsilon(\varepsilon x)} = \overline{e\varepsilon}\,, \qquad \varepsilon^2 \gtreqless 1$$

auf. In diesem Falle führe man einen Vektor $\bar{h}$ ein durch die Festsetzung

$$\overline{e\varepsilon} = \varepsilon^2 \cdot \bar{h} .$$

Jetzt wird

$$(\bar{\varepsilon}\bar{x}) \cdot \bar{\varepsilon} - \varepsilon^2 \cdot \bar{x} = -\varepsilon^2 \cdot \bar{h}\,,$$

d. h.

$$\varepsilon^2 \overline{(x - h)} = (\bar{\varepsilon}\bar{x}) \cdot \bar{\varepsilon} .$$

Mithin ist
$$\overline{\varepsilon(x-h)}=0$$
die Gleichung der Geraden in der gewöhnlichen Form.

Man kann aus der vorgelegten Gleichung (a) auch unmittelbar auf die Form
$$\overline{\varepsilon x}=\bar{e}+l\cdot\bar{\varepsilon}$$
schließen, wo l eine Länge bedeutet.

Nun ist
$$0=\bar{\varepsilon}\bar{e}+l\cdot\varepsilon^2\,,$$
d. h.
$$l=-\frac{\bar{\varepsilon}\bar{e}}{\varepsilon^2}\,.$$
Mithin
$$\overline{\varepsilon x}=\frac{\overline{\varepsilon(e\varepsilon)}}{\varepsilon^2}=\overline{\varepsilon h}$$
oder
$$\overline{\varepsilon(x-h)}=0\,,$$
wie vorher.

Für eine Gerade, welche durch zwei feste Punkte A und B geht, ist
$$\overline{(b-a)(x-a)}=0$$
oder
$$\overline{(b-a)x}+\overline{ab}=0\,.$$

Anmerkung. Anstatt die Gerade
$$\overline{\varepsilon(x-a)}=0$$
durch die Vektoren $\bar{\varepsilon}$ und $\bar{a}$ als bestimmt anzusehen, kann man die Gleichung auch auf die Form bringen
$$\overline{\varepsilon x}=\overline{\varepsilon a}=\bar{c}\,,\quad \text{wo}\quad \bar{\varepsilon}\bar{c}=0$$
ist, und die Vektoren $\bar{\varepsilon}$ und $\bar{c}$ als ursprüngliche Bestimmungsgrößen (Koordinaten im vektoriellen Sinne) betrachten. Das ist von Plücker (Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. 2 Bde. 1868/69) geschehen, der auf diese Anschauung die analytische Liniengeometrie gegründet hat. Es handelt sich hierbei zunächst darum, die Gerade aus den gegebenen Koordinatenvektoren $\bar{\varepsilon}$ und $\bar{c}$ im Raume zu konstruieren. Zu diesem Zwecke bilden wir aus der Gleichung $\overline{\varepsilon x}=\bar{c}$ die folgende
$$\overline{\varepsilon(\varepsilon x)}=\overline{\varepsilon c}\quad\text{oder}\quad(\bar{\varepsilon}\bar{x})\cdot\bar{\varepsilon}-\bar{x}=\overline{\varepsilon c}\,.$$

Denn man kann stets $\bar{\varepsilon}$ als Einheitsvektor nehmen. Es wird also

$$\bar{x} = (\bar{\varepsilon}\,\bar{x}) \cdot \bar{\varepsilon} + \overline{c\varepsilon}\,.$$

Nun wählen wir auf der Geraden einen bestimmten Punkt X_1, welcher der Bedingung genügt: $\bar{\varepsilon}\,\bar{x}_1 = 0$ und erhalten

$$\bar{x}_1 = \overline{c\varepsilon}\,, \quad \text{d. h.} \quad x_1 = c\,.$$

Hiernach ergibt sich sofort die Konstruktion:

Von dem festen Bezugspunkte O (Fig. 20) aus ziehe man senkrecht zueinander die gegebenen Vektoren $\bar{c}$ und $\bar{\varepsilon}$ und errichte in O zur Ebene dieser Vektoren eine Senkrechte $\bar{x}_1$ von der Länge c entsprechend der Definition $\bar{x}_1 = \overline{c\varepsilon}$. Eine Parallele durch den Endpunkt $\bar{x}_1$ dieser Strecke zu $\bar{\varepsilon}$ ist die Gerade, welche durch die Plückerschen Koordinaten $\bar{\varepsilon}$ und $\bar{c}$ eindeutig bestimmt ist.

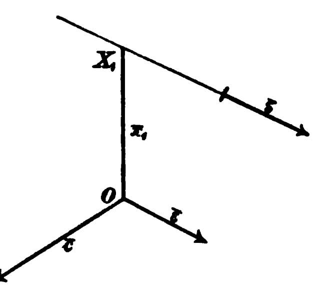


Fig. 20.

Die Parametergleichung der Geraden von der Richtung $\bar{\varepsilon}$ durch den Punkt $\bar{a}$ ist

$$\bar{x} = \bar{a} + l \cdot \bar{\varepsilon}\,,$$

wenn l die Entfernung des laufenden Punktes X von dem Punkte A bedeutet.

In der Mechanik tritt die Gerade häufig als Träger eines Vektors auf in dem Sinne, daß dieser Vektor in der Geraden liegt, aber ohne Einfluß auf seine Wirkung beliebig innerhalb derselben verschoben werden kann. Ist nun

$$\overline{\varepsilon(x - a)} = 0$$

die Gleichung der Geraden, in welcher der Vektor $\bar{k}$ liegt, so ist natürlich

$$\overline{k(x - a)} = 0\,.$$

Wir werden im Laufe der Darstellung häufig derartigen, in ihrer Wirkungslinie verschiebbaren Vektoren begegnen, welche man zum Unterschied von den Vektoren im engeren Sinne, die ohne weiteres eine Parallelverschiebung gestatten, „linienflüchtige Vektoren“ oder (in französischen Schriften) „Segmente“ genannt hat. Graßmann bezeichnet die linear gebundenen Vektoren als „Linienteile“, eine Benennung, die

auch in der „Enzyklopädie der mathemat. Wissenschaften“ Bd. 4, I. Teil, Art. 2 beibehalten ist.

22. Kürzester Abstand zwischen zwei Geraden. Wir denken uns die beiden Geraden in der Plückerschen Form gegeben:

(1) $$\overline{\varepsilon' x} = \overline{c'} \quad \text{und} \quad \overline{\varepsilon'' x} = \overline{c''}$$

und nennen (Fig. 21) die Endpunkte der kürzesten Verbindungsstrecke, welche wir nach Größe und Richtung mit $\bar e$ bezeichnen, X' und X''. Dann ist im Dreieck $OX'X''$

$$\bar e = \overline{x'' - x'} \quad \text{und außerdem} \quad \overline{\varepsilon' x'} = \overline{c'}, \quad \text{sowie} \quad \overline{\varepsilon'' x''} = \overline{c''}.$$

Jetzt bilden wir das innere Produkt:

$$\bar e\, \overline{\varepsilon' \varepsilon''} = \overline{x'' - x'}\, \overline{\varepsilon' \varepsilon''} = \overline{x''}\, \overline{\varepsilon' \varepsilon''} - \overline{x'}\, \overline{\varepsilon' \varepsilon''}.$$

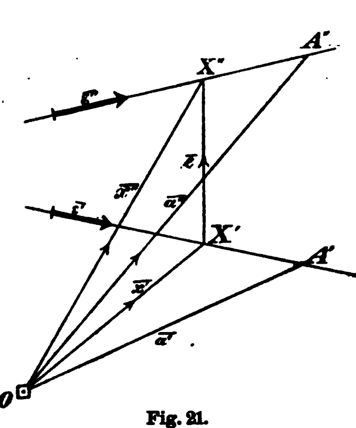


Fig. 21.

Die Vertauschungsformel ergibt also

$$\bar e\, \overline{\varepsilon' \varepsilon''} = \overline{\varepsilon'} \cdot \overline{\varepsilon'' x''} - \overline{x' \varepsilon'} \cdot \overline{\varepsilon''}$$

oder

(2) $$\bar e \cdot \overline{\varepsilon' \varepsilon''} = \overline{\varepsilon'}\, \overline{c''} + \overline{\varepsilon''}\, \overline{c'}.$$

Mithin ist

(3) $$\bar e = \frac{\overline{\varepsilon'}\, \overline{c''} + \overline{\varepsilon''}\, \overline{c'}}{\overline{\varepsilon' \varepsilon''}^2} \cdot \overline{\varepsilon' \varepsilon''},$$

denn es hat $\bar e$ die Richtung von $\overline{\varepsilon' \varepsilon''}$. Den absoluten Betrag des Momentproduktes $\overline{\varepsilon' \varepsilon''}$ wollen wir durch das Zeichen $\overline{\overline{\varepsilon' \varepsilon''}}$ ausdrücken. Dann entsteht für den kürzesten Abstand die bekannte Formel

$$e = \frac{\overline{\varepsilon'}\, \overline{c''} + \overline{\varepsilon''}\, \overline{c'}}{\overline{\overline{\varepsilon' \varepsilon''}}}.$$

Die Geraden $\overline{\varepsilon'(x - a')} = 0$ und $\overline{\varepsilon''(x - a'')} = 0$ schneiden sich also, wenn die Bedingung $\overline{\varepsilon'}\, \overline{\varepsilon'' a''} + \overline{\varepsilon''}\, \overline{\varepsilon' a'} = 0$ oder $\overline{a'' - a'} \cdot \overline{\varepsilon' \varepsilon''} = 0$ erfüllt ist, was man natürlich auch ohne jede Rechnung sehen kann. Die Größe $\bar e\, \overline{\varepsilon' \varepsilon''}$ spielt in der Mechanik eine große Rolle, wenn es sich um Zusammensetzung von Geschwindigkeiten oder von Kräften handelt.

Auch in der Liniengeometrie (vgl. Nr. 21) ist sie von wesentlicher Bedeutung. Hier nennt man

$$\bar{e}\,\overline{\varepsilon'\varepsilon''} = \overline{\varepsilon'}\,\overline{c''} + \overline{\varepsilon''}\,\overline{c'}$$

das „gegenseitige Moment“ der beiden Geraden $\overline{\varepsilon' x} = \bar{c}$, $\overline{\varepsilon'' x} = \overline{c''}$. Nach dieser Benennung kann man also auch sagen: Zwei Gerade schneiden sich, wenn ihr gegenseitiges Moment verschwindet.

23. Schnitt einer Ebene mit einer Geraden. Diese Operation bildet die Grundlage der Projektionsmethoden, welche für die Bedürfnisse der Kinematik in etwas allgemeinerer Weise aufgefaßt und dargestellt werden müssen, als es in den elementaren Lehrbüchern der darstellenden Geometrie geschieht. Hier nimmt man auf die vollständige Lagenbestimmung der Bildebene nicht in erster Linie Rücksicht, betrachtet dieselbe vielmehr schlechthin als Zeichenebene. Bei der Anwendung der Projektionsmethoden in der Kinematik spielt die zeichnerische Konstruktion der perspektivischen Bilder eine ganz untergeordnete Rolle, während die definite Orientierung der Bildebenen und der Projektionszentren im Raume zur Hauptsache wird. Das Zeichnen wird durch die Photographie ersetzt und zwei vollständig orientierte photographische Aufnahmen gestatten im allgemeinen Falle die absolute Lagenbestimmung aller Punkte, welche in beiden als identische erkennbar sind. Dieses Verfahren hat man als „Meßbildmethode“ oder „Photogrammetrie“ bezeichnet. Wir wollen hier nur die obengenannte geometrische Grundaufgabe lösen und das weitere im Anhang zu Band 2 bringen.

Als Gleichung der Ebene nehmen wir $\bar{\nu}\bar{x} = n$ und als Gleichung der schneidenden Geraden $\overline{\varepsilon x} = \bar{c}$. Hieraus ist der Vektor desjenigen Punktes Z zu entwickeln, welcher beiden Gebilden gemeinsam ist. Zu diesem Zwecke bilden wir aus $\overline{\varepsilon \mathfrak{z}} = \bar{c}$ das Moment mit $\bar{\nu}$ und erhalten

$$\overline{\nu(\varepsilon \mathfrak{z})} = \overline{\nu c} \quad \text{oder} \quad (\bar{\nu}\bar{\mathfrak{z}}) \cdot \bar{\varepsilon} - (\bar{\nu}\bar{\varepsilon}) \cdot \bar{\mathfrak{z}} = \overline{\nu c}\,.$$

Wegen $\bar{\nu}\bar{\mathfrak{z}} = n$ wird also:

$$\bar{\mathfrak{z}} = \frac{n \cdot \bar{\varepsilon} - \overline{\nu c}}{\bar{\nu}\bar{\varepsilon}}$$

der Vektor des gesuchten Schnittpunktes.

Aufgabe 18. Man bestimme den Vektor des Schnittpunktes des Strahls $\overline{(c-a)(x-a)}=0$, welcher durch die Punkte C (Zentrum) und A (Objektpunkt) geht, mit der Bildebene $\overline{\nu}\,\overline{x-e}=0$.

IV. Elementarbegriffe aus der Theorie der Raumkurven.

24. Schraubenlinie auf dem Kreiszylinder. Den Radius des Grundkreises des Zylinders bezeichnen wir mit a und nehmen in demselben einen festen Radius $OA=\overline{a}$ an. In

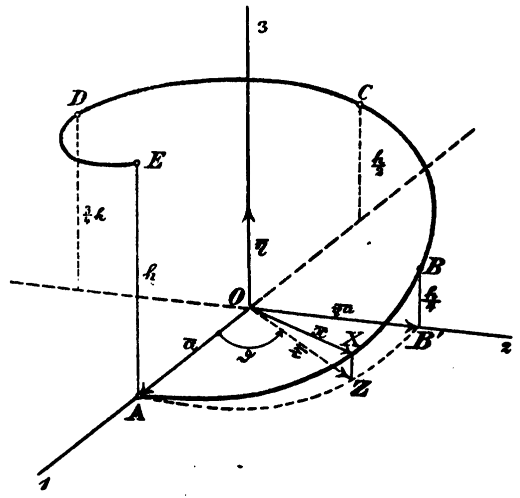


Fig. 22.

die Achse des Zylinders legen wir den Einheitsvektor $\overline{\eta}$, so daß $\overline{OB'}=\overline{\eta\,a}$ wird. Für die Parametergleichung des Grundkreises hat man dann nach Fig. 22

$$\overline{z}=\overline{a}\cos\vartheta+\overline{\eta\,a}\sin\vartheta\,.$$

Ist also h die Steigung der Schraubenlinie für einen vollen Umgang (2π), dann ist

$$\text{Vektor } ZX=\frac{h\vartheta}{2\pi}\cdot\overline{\eta}$$

und man erhält ohne weiteres die Gleichung der Schraubenlinie in der Form:

$$\bar{x} = \bar{a}\cos\vartheta + \overline{\eta\, a}\sin\vartheta + \frac{h\vartheta}{2\pi}\cdot\bar{\eta},$$

welche ein vortreffliches Beispiel für die nun folgenden elementaren Entwicklungen aus der Differentialgeometrie bildet.

Anmerkung. Im Anschluß an diese spezielle Raumkurve wollen wir die allgemeine Gleichung in der Parameterform

$$\bar{x} = \bar{\alpha}\cdot\psi(\vartheta) + \overline{\eta\,\alpha}\cdot\varphi(\vartheta) + \bar{\eta}\cdot\chi(\vartheta), \quad \text{wo} \quad \overline{\alpha\,\eta} = 0$$

ist, schreiben und dafür zur Abkürzung

$$\bar{x} = \bar{f}(\vartheta)$$

setzen.

26. Der Tangentenvektor. Indem wir von dem Punkte X zu einem zweiten Punkte X' (Fig. 23) einer gegebenen Kurve fortgehen, nimmt ϑ den Wert ϑ' an und es folgt aus

$$\bar{x} = \bar{f}(\vartheta) \quad \text{und} \quad \overline{x'} = \bar{f}(\vartheta')$$

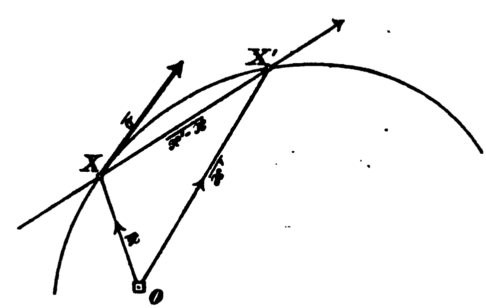


Fig. 23.

für die Sehne XX' der Ausdruck

$$\overline{x' - x} = \bar{f}(\vartheta') - \bar{f}(\vartheta).$$

Bei unbegrenzter Annäherung des Punktes X' an X wird $\overline{x' - x} = d\bar{x}$ und entsprechend $\vartheta' = \vartheta + d\vartheta$. Also

$$d\bar{x} = \bar{f}(\vartheta + d\vartheta) - \bar{f}(\vartheta)$$

und hieraus

$$\frac{d\bar{x}}{d\vartheta} = \frac{d\bar{f}(\vartheta)}{d\vartheta} = \bar{f}'(\vartheta)$$

unter Anwendung der üblichen Bezeichnungen der Differentialrechnung. Der Vektor

$$d\bar{x} = \bar{f}'(\vartheta) \cdot d\vartheta$$

stellt also das Bogenelement im Punkte X nach Richtung und Größe dar. Die Länge dieses Bogenelementes sei ds und definiert durch die Gleichung

$$ds^2 = d\bar{x} \cdot d\bar{x}.$$

Hieraus folgt, daß

$$\bar{\sigma} = \frac{d\bar{x}}{ds}$$

ein Einheitsvektor ist, der die Richtung der Tangente im Punkte X ausdrückt.

Aufgabe 19. Der Tangentenvektor $\bar{\sigma}$ soll für die Schraubenlinie allgemein gebildet werden. Hiernach sind (Fig. 22) die Gleichungen der Tangenten in den Punkten A, B, C, D, E aufzustellen und die kürzesten Abstände von je zwei aufeinanderfolgenden Tangenten für $a = 200$ m und $h = 30$ m zu berechnen.

26. Normalvektor, Biegungsradius und Maß der Biegung. Bei einer Raumkurve ist $\bar{\sigma}$ eine von Punkt zu Punkt nach Größe und Richtung veränderliche Größe, so daß auch der Differentialquotient dieses Vektors nach ϑ in Betracht gezogen wird, um für diese Änderung ein bestimmtes Maß zu gewinnen. Wir bilden deshalb

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = \frac{d^2\bar{x}}{ds^2}$$

oder indem wir beachten, daß ϑ als unabhängige Veränderliche gewählt ist

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = \frac{d^2\bar{x}}{d\vartheta^2} : \left(\frac{ds}{d\vartheta}\right)^2 - \frac{d\bar{x}}{d\vartheta}\,\frac{d^2 s}{d\vartheta^2} : \left(\frac{ds}{d\vartheta}\right)^3.$$

Den absoluten Betrag von $d\bar{\sigma}$ bezeichnen wir mit $d\psi$, setzen also in der Schreibweise der Analysis

$$|d\bar{\sigma}| = d\psi.$$

Aus Fig. 24 erkennt man nun sofort die Bedeutung der Größe $d\psi$. Sie ist unmittelbar der Kontingenzwinkel $d\alpha$, also der Richtungsunterschied zwischen zwei aufeinander-

folgenden Tangenten der gegebenen Raumkurve. Dasselbe Resultat erhält man auch durch analytische Betrachtung. Fassen wir nämlich den Kontingenzwinkel als Vektor $d\overline{\alpha}$ auf, so ist:

$$d\overline{\alpha} = \overline{(\sigma + d\sigma)\,\sigma} = \overline{d\sigma \cdot \sigma}\,,$$

weil $\sin(d\alpha) = d\alpha$ gesetzt werden kann. Nun steht $d\overline{\sigma}$ senkrecht auf $\overline{\sigma}$. Folglich, wie vorher, $d\alpha = d\psi$.

Der Einheitsvektor

$$\overline{\nu} = \frac{d\overline{\sigma}}{d\alpha}$$

steht auf der Tangente senkrecht, wie man auch ohne Be-

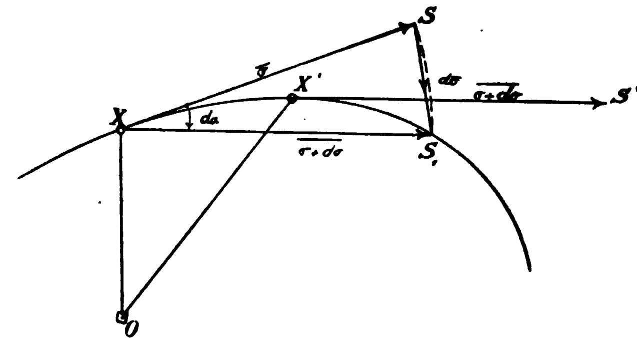


Fig. 24.

nutzung der räumlichen Anschauung erkennt. Denn aus $\overline{\sigma}\overline{\sigma} = 1$ folgt sofort $\overline{\sigma}\,d\overline{\sigma} = 0$. Er liegt in der Schmiegungsebene, welche durch zwei benachbarte Tangenten der Raumkurve bestimmt ist und gibt die Richtung der Hauptnormalen im Punkte X an. Wir bezeichnen $\overline{\nu}$ kurz als Normalvektor.

Setzt man noch $ds = r\,d\alpha$, so erkennt man, daß r den Radius eines Kreises in der Schmiegungsebene darstellt, dessen Mittelpunkt in der Hauptnormale liegt. Er charakterisiert die Biegung der Kurve und r wird deshalb auch Biegungsradius genannt.

Jetzt hat man:

$$\overline{\nu} = \frac{d\overline{\sigma}}{ds}\frac{ds}{d\alpha} = r \cdot \frac{d\overline{\sigma}}{ds}\,,$$

oder bei Verwendung des allgemeinen Parameters ϑ:

$$\bar{\nu} = r\left[\frac{d^2\bar{x}}{d\vartheta^2} : \left(\frac{ds}{d\vartheta}\right)^2 - \frac{d\bar{x}}{d\vartheta}\,\frac{d^2s}{d\vartheta^2} : \left(\frac{ds}{d\vartheta}\right)^3\right].$$

$\frac{1}{r}$ ist das „Maß der Biegung" der Raumkurve, welches man auch kurzweg als Biegung bezeichnen kann.

Aus dem vorstehenden Ausdrucke für $\bar{\nu}$ folgt für rechtwinklige Zerlegungen von $\bar{x}$ sofort die bekannte Formel zur Berechnung der Biegung, wenn wir $d\vartheta = ds$ wählen:

$$\frac{1}{r} = \sqrt{\left(\frac{d^2x_1}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x_2}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x_3}{ds^2}\right)^2}.$$

Hierin ist jetzt der Bogen s die unabhängig Veränderliche, also ds konstant.

Anmerkung. Man hat stets streng zu unterscheiden zwischen $|d\bar{x}|$ und $d|\bar{x}|$.

Aufgabe 20. Man bestimme den Biegungsradius für die Schraubenlinie und verwende zur numerischen Berechnung die Daten in Aufgabe 19.

27. Binormale, Windungsradius und Maß der Windung. Da die Einheitsvektoren $\bar{\sigma}$ und $\bar{\nu}$ aufeinander senkrecht stehen, so wird der Ausdruck:

$$\bar{\eta} = \overline{\sigma\nu}$$

einen neuen Einheitsvektor darstellen, der gleichzeitig auf der Tangente und der Hauptnormale, d. h. auf der Schmiegungsebene senkrecht steht. Er bestimmt die Richtung der Binormalen der Raumkurve, ist also für ebene Kurven eine unveränderliche Größe (d. h. mit Einschluß der Richtung).

Wir bilden jetzt die Derivierte*)

$$\frac{d\bar{\eta}}{ds} = \overline{\sigma \cdot \frac{d\nu}{ds}} + \overline{\frac{d\sigma}{ds} \cdot \nu} = \overline{\sigma \cdot \frac{d\nu}{ds}}$$

und beachten die Gleichung

$$\bar{\eta}\,\frac{d\bar{\eta}}{ds} = 0.$$

Hieraus folgt, daß $\frac{d\bar{\eta}}{ds}$ sowohl auf $\bar{\sigma}$ als auch auf $\bar{\eta}$ senkrecht steht, also in die Richtung der Hauptnormalen ($\bar{\nu}$) fällt.

*) Für die Differentiation des Moment- oder Arbeitsproduktes gilt dieselbe Regel wie für ein Produkt aus gewöhnlichen Zahlen.

Setzt man demnach

$$\frac{d\bar{\eta}}{ds} = \frac{\bar{\nu}}{r'}, \tag{1}$$

so stehen die Größen r' und $|d\bar{\eta}| = d\psi'$ in der Beziehung

$$r' \cdot d\psi' = ds,$$

welche vollständig analog ist zu der früher erhaltenen

$$r\, d\psi = ds.$$

$d\psi'$ ist die Winkelabweichung zwischen zwei aufeinanderfolgenden Binormalen. Sie definiert den Schmiegungs- oder **Windungswinkel**. Die Hilfsgröße r' läßt sich nicht als Radius eines Kreises auffassen, der mit der Kurve in einer so anschaulichen Beziehung steht, wie der Biegungskreis. Dennoch bezeichnet man sie analog als **Radius der Windung** und faßt $\frac{1}{r'}$ als **Maß der Windung** auf.

Um eine explizite Formel für $\frac{1}{r'}$ zu gewinnen, führen wir in

$$\frac{d\bar{\eta}}{ds} = \overline{\sigma \frac{d\nu}{ds}},$$

$$\bar{\nu} = r \frac{d\bar{\sigma}}{ds},$$

das heißt

$$\frac{d\bar{\nu}}{ds} = r \cdot \frac{d^2\bar{\sigma}}{ds^2} + \frac{dr}{ds} \cdot \frac{d\bar{\sigma}}{ds}$$

ein und erhalten zunächst:

$$\frac{d\bar{\eta}}{ds} = r \cdot \overline{\sigma \frac{d^2\sigma}{ds^2}} + \frac{dr}{ds} \cdot \overline{\sigma \frac{d\sigma}{ds}}$$

oder

$$\frac{d\bar{\eta}}{ds} = r \cdot \overline{\sigma \frac{d^2\sigma}{ds^2}} + \frac{dr}{ds} \cdot \frac{\bar{\eta}}{r}$$

und hieraus

$$\bar{\nu} \frac{d\bar{\eta}}{ds} = r^2 \cdot \frac{d\bar{\sigma}}{ds} \cdot \overline{\sigma \frac{d^2\sigma}{ds^2}}.$$

Dies ergibt unmittelbar die bekannte Formel

$$\frac{1}{r'} = r^2 \cdot \frac{d\bar{\sigma}}{ds} \cdot \overline{\sigma \frac{d^2\sigma}{ds^2}}, \tag{2}$$

wofür man auch schreiben kann

$$\frac{1}{r'} = -r^2 \cdot \overline{\sigma \cdot \frac{d\sigma}{ds} \frac{d^2\sigma}{ds^2}} \, . \tag{3}$$

Hiermit ist das geometrische Werkzeug, welches in der Kinematik Verwendung findet, in den Grundzügen entwickelt. Wir fügen noch die folgenden Aufgaben zur Einübung hinzu.

Aufgabe 21. Für welche Linie ist $r = \infty$? Man bestimme die Gleichung derselben durch Integration der Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 x_1}{ds^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2 x_2}{ds^2} = 0 \, .$$

Aufgabe 22. Beweise, daß bei der Schraubenlinie die Windung konstant ist. Berechne den Windungsradius r' für die Daten in Aufgabe 19.

Aufgabe 23. Zeige, daß alle Kurven, welche der Bedingung $\overline{\sigma \cdot \frac{d\sigma}{ds} \frac{d^2\sigma}{ds^2}} = 0$ genügen, eben sind.

I. Abschnitt.

Kinematik des Punktes.

A) Bewegung des Punktes in freier Bahn.

28. Der Punkt als Objekt der Bewegung. Wenn wir einen Stein, ein Geschoß oder gar einen Planeten bei der Untersuchung seiner Bewegung als Punkt betrachten, so ist dies natürlich eine weitgehende Abstraktion von der Wirklichkeit. Sie hat aber für die geschichtliche Entwicklung der Kinematik eine große Bedeutung gehabt, denn nur auf diesem Wege ist es möglich gewesen, die elementarsten Bewegungsvorgänge mathematisch zu erfassen und zunächst die methodischen Grundlagen für weitergehende Entwicklungen zu gewinnen. Huyghens (1629—1695) war wohl der erste, welcher über die primitive Punktvorstellung prinzipiell hinausging, indem er nach dem Vorgange von Descartes (1596—1650) die Auffassung des einfachen oder mathematischen Pendels (schwerer Punkt am Ende eines massenlosen Fadens) verließ und eine systematisch vollständige Kinematik des physischen Pendels entwickelte. Galilei war über die elementarsten Bewegungserscheinungen des einfachen Punktes niemals hinausgekommen und Newton blieb, soweit die Kinematik in Betracht kommt, an der gleichen Einschränkung haften.

Wie schon in der Einleitung (Nr. 3) erwähnt, betrachten wir alle Begriffe, welche in ihrer Definition mit der Vorstellung des Punktes unzertrennlich verknüpft sind, als Elementarbegriffe und gehen von hier aus stufenweise zu den höheren Systembegriffen über.

29. Der Geschwindigkeitsvektor eines Punktes. Wir nennen die Bahn eines Punktes eine freie, wenn er nicht gezwungen ist, auf einer festen Kurve oder Fläche zu bleiben. In dieser

Lage ist der fallende Stein und der Planet bei seinem Umlaufe um die Sonne. Wir können uns jetzt den Punkt in zwei aufeinanderfolgenden Positionen seiner Bahn vorstellen und diese Ortsänderung zum Zeitverlauf in Beziehung setzen.

Auf die praktische Messung der Zeitintervalle wollen wir uns an dieser Stelle nicht einlassen, vielmehr voraussetzen, daß diese Frage irgendwie erledigt sei. Als Einheit wählen wir, wie üblich, die Sekunde mittlerer Sternzeit, und setzen fest, daß die Zählung der abgelaufenen Sekunden und Bruchteile derselben in dem Augenblicke beginnt, in dem $\bar{x} = \bar{a}$ ist. Den Zeitverlauf selbst betrachten wir als eine Größe der nullten Dimension (Zahl) und drücken dieselbe dementsprechend durch τ aus. Jetzt ist

$$\bar{x} = \bar{f}(\tau)$$

und

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \bar{v} = \frac{d\bar{f}(\tau)}{d\tau}$$

der Vektor der Geschwindigkeit des in Bewegung befindlichen Punktes. Hat man also im besonderen Falle

$$\bar{x} = \tfrac{1}{2}\bar{g}\cdot\tau^2 + \bar{c}\cdot\tau + \bar{a}\,,$$

wo $\bar{g}$, $\bar{c}$, $\bar{a}$ konstante Vektoren sind, so wird der Vektor der Geschwindigkeit

$$\bar{v} = \bar{g}\cdot\tau + \bar{c}\,,$$

so daß also $\bar{c}$ die Geschwindigkeit zur Zeit $\tau = 0$ ausdrückt.

Der Zerlegung von $\bar{v}$ nach drei zueinander rechtwinkligen Achsen (1, 2, 3) entspricht die Gleichung

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3\,,$$

woraus man für das Quadrat der Intensität (v) der Geschwindigkeit erhält

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\,,$$

worin

$$v_1 = \frac{dx_1}{d\tau}\,,\quad v_2 = \frac{dx_2}{d\tau}\,,\quad v_3 = \frac{dx_3}{d\tau}$$

zu nehmen ist.

Schreiben wir die Bahngleichung in der Parameterform

$$\bar{x} = \bar{f}(\vartheta)\,,$$

so wird

$$\bar{v} = \frac{d\bar{f}}{d\vartheta}\,\frac{d\vartheta}{d\tau}\,.$$

Die neu eintretende Größe $\frac{d\vartheta}{d\tau}$ wird als Geschwindigkeit des Parameters oder gelegentlich auch kurz als Parametergeschwindigkeit bezeichnet.

Aus der Identität

$$\bar{v} = \frac{d\bar{x}}{d\tau} = \frac{ds}{d\tau} \cdot \frac{d\bar{x}}{ds}$$

folgt durch Einführung des Tangentenvektors ($\bar{\sigma}$):

$$\bar{v} = \frac{ds}{d\tau} \cdot \bar{\sigma} = v \cdot \bar{\sigma} .$$

30. Das Moment der Geschwindigkeit (Flächengeschwindigkeit). Der lagebestimmende Vektor $OX = \bar{x}$ bildet mit $\bar{v}$ ein Parallelogramm, welches durch das Momentprodukt $\overline{xv}$ orientiert ist. Man bezeichnet diese neue vektorielle Größe einfach als Moment der Geschwindigkeit in bezug auf den festen Punkt O. Nun ist aber

$$\overline{xv} = \frac{\overline{x \cdot dx}}{d\tau}$$

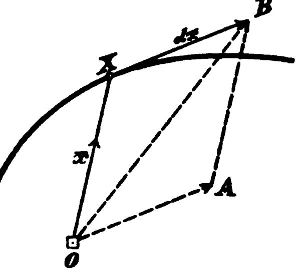


Fig. 25.

und hierin bedeutet $\overline{x \cdot dx}$ die Fläche des Parallelogramms aus den Seiten $\bar{x}$ und $d\bar{x}$ (Fig. 25) als skalare Größe, die Hälfte desselben also den Grenzwert des Sektors OXB. Das Moment $\overline{xv}$ stellt mithin das Doppelte der Sektorgeschwindigkeit dar. Diese Auffassung der Bewegung eines Punktes mit Rücksicht auf die Flächen, welche der Radiusvektor OX überstreicht, geht auf die ersten Versuche zurück, welche man im Altertum gemacht hat, um die Bewegung der Planeten zu beschreiben. Man beschränkte sich aber so lange auf Kreisbahnen mit konstanter Flächengeschwindigkeit, bis Kepler endlich dies alte Vorurteil brach und zu elliptischen Bahnen überging, bei welchen er die konstante Flächengeschwindigkeit bewahrt fand.

Wir bezeichnen im folgenden die Größe $\overline{xv}$ einfach als „Flächengeschwindigkeit" des Punktes X und können demnach den Satz aussprechen:

Die Flächengeschwindigkeit eines Punktes in bezug auf einen festen Anfangspunkt O ist mit dem Moment seines Geschwindigkeitsvektors in bezug auf denselben Punkt identisch.

Es ist kaum nötig zu bemerken, daß bei Voraussetzung einer doppelt gekrümmten Bahn (d. h. einer solchen mit Biegung und Windung) die Fläche, welche von dem Radiusvektor OX beschrieben wird, als Kegelmantel erscheint.

Für beide Fälle (Ebene und Raumkurve) wollen wir ein Beispiel durchführen, um die Bildung der Flächengeschwindigkeit zu erläutern.

Zunächst betrachten wir die Keplersche Planetenbewegung. In Fig. 26 sei $CA = a$ die halbe große Achse und $CB = b$ die halbe kleine Achse der elliptischen Bahn. Im Brennpunkte O stehe die Sonne, so daß $OX = \bar{x}$ der Vektor des Planeten ist. $OP = \bar{p}$ sei der halbe Parameter der Ellipse nach Größe und Richtung. Die Exzentrizität OC wird dargestellt durch $\sqrt{a^2 - b^2}$ und die numerische Exzentrizität durch den Ausdruck

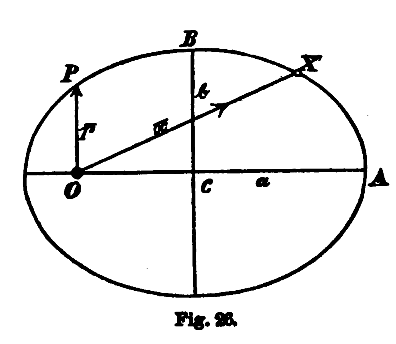


Fig. 26.

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

In dem Mittelpunkte C errichten wir nun eine Senkrechte auf der Bahnebene und bezeichnen den entsprechenden Einheitsvektor mit $\bar{\eta}$. Dann ist

$$\bar{x} = \bar{p} \cdot \frac{\sin\vartheta}{1 + \varepsilon\cos\vartheta} + \overline{p\eta} \cdot \frac{\cos\vartheta}{1 + \varepsilon\cos\vartheta}$$

die Gleichung der Bahn für den Parameter ϑ, welcher die wahre Anomalie (Polarwinkel) des Planeten darstellt.

Hieraus bilden wir jetzt durch Differentiation nach der Zeit τ den Vektor der Geschwindigkeit

$$\bar{v} = \frac{d\bar{x}}{d\tau} = \left\{ \bar{p} \cdot \frac{\varepsilon + \cos\vartheta}{(1 + \varepsilon\cos\vartheta)^2} - \overline{p\eta} \cdot \frac{\sin\vartheta}{(1 + \varepsilon\cos\vartheta)^2} \right\} \frac{d\vartheta}{d\tau}$$

und dann sofort

$$\overline{F} = \overline{xv} = \frac{p^2}{(1+\varepsilon\cos\vartheta)^2}\frac{d\vartheta}{d\tau}\cdot\overline{\eta}\,.$$

Nun folgt aber, wenn wir die Länge von $\bar{x}$ mit r bezeichnen, aus der Parametergleichung der Ellipse:

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\vartheta}\,.$$

Damit wird

$$\overline{F} = r^2\frac{d\vartheta}{d\tau}\cdot\overline{\eta}\,,$$

wie man auch ohne jede Rechnung erkennt.

Nach dem zweiten Keplerschen Gesetze ist F von der Zeit unabhängig. Da nun $\overline{\eta}$ nach der Annahme konstant ist, so können wir dieses Gesetz auch in der folgenden Form aussprechen:

Bei der Planetenbewegung ist das Moment der Geschwindigkeit nach Größe und Richtung unveränderlich.

Als zweites Beispiel wählen wir die gleichförmige Bewegung auf der Schraubenlinie (Nr. 24).

$$\bar{x} = \bar{a}\cos\vartheta + \overline{\eta a}\sin\vartheta + \frac{h}{2\pi}\vartheta\cdot\overline{\eta}\,.$$

Wir erhalten zunächst durch Differenzieren nach der Zeit τ:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{x}}{d\tau} = \left[-\bar{a}\sin\vartheta + \overline{\eta a}\cos\vartheta + \frac{h}{2\pi}\cdot\overline{\eta}\right]\frac{d\vartheta}{d\tau}$$

und durch Momentbildung

$$\begin{aligned}\overline{xv} = \Big\{&\overline{a(\eta a)}\cos^2\vartheta + \frac{h}{2\pi}\cdot\overline{a\eta}\cdot\cos\vartheta \\ &-\overline{(\eta a)a}\sin^2\vartheta + \frac{h}{2\pi}\overline{(\eta a)\eta}\sin\vartheta \\ &-\frac{h}{2\pi}\vartheta\sin\vartheta\cdot\overline{\eta a} + \frac{h}{2\pi}\vartheta\cos\vartheta\cdot\overline{\eta(\eta a)}\Big\}\frac{d\vartheta}{d\tau}\,.\end{aligned}$$

Nun ist aber nach der Entwicklungsformel:

$$\overline{a(\eta a)} = a^2\cdot\overline{\eta} \quad \text{und} \quad \overline{\eta(\eta a)} = -\bar{a}\,.$$

Folglich

$$\overline{F} = \overline{xv}$$

$$=\left\{\frac{h}{2\pi}(\sin\vartheta - \vartheta\cos\vartheta)\cdot\bar{a} - \frac{h}{2\pi}(\cos\vartheta + \vartheta\cos\vartheta)\cdot\overline{\eta a} + a^2\cdot\overline{\eta}\right\}\frac{d\vartheta}{d\tau}\,.$$

In dieser Form ist auch zugleich die Komponentenzerlegung von F nach einem Achsenkreuz (1, 2, 3) ausgedrückt, wenn die entsprechenden Richtungen durch $\bar{a}$, $\overline{\eta\, a}$ und $\overline{\eta}$ gegeben sind. Es wird also

$$F_1 = \frac{h}{2\pi}(\sin\vartheta - \vartheta\cos\vartheta)\, a\frac{d\vartheta}{d\tau},$$

$$F_2 = -\frac{h}{2\pi}(\cos\vartheta + \vartheta\cos\vartheta)\, a\frac{d\vartheta}{d\tau},$$

$$F_3 = a^2\frac{d\vartheta}{d\tau}.$$

Wir haben nun auszudrücken, daß v längs der ganzen Bahn unveränderlich, d. h. gleich einer Konstanten c ist. Zu diesem Zwecke bilden wir

$$v^2 = \left[a^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2\right]\left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)^2$$

und erhalten

$$c = a\sqrt{1 + \left(\frac{h}{2\pi a}\right)^2}\cdot\frac{d\vartheta}{d\tau}.$$

Folglich wird

$$F_1 = \frac{hc}{2\pi}\frac{\sin\vartheta - \vartheta\cos\vartheta}{\sqrt{1 + \left(\frac{h}{2\pi a}\right)^2}},$$

$$F_2 = -\frac{hc}{2\pi}\frac{\cos\vartheta + \vartheta\cos\vartheta}{\sqrt{1 + \left(\frac{h}{2\pi a}\right)^2}},$$

$$F_3 = ac\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{h}{2\pi a}\right)^2}}.$$

Ist nun, wie es bei Gefällkurven im Eisenbahnbau vorkommt, h gegen $2\pi a$ sehr klein, so kann man in erster Annäherung setzen

$$F_1 = \frac{hc}{2\pi}(\sin\vartheta - \vartheta\cos\vartheta),$$

$$F_2 = -\frac{hc}{2\pi}\cos\vartheta(1 + \vartheta),$$

$$F_3 = ac.$$

31. Winkelgeschwindigkeit des Radiusvektors bei der Kreisbewegung. Aus der Kreisgleichung (Nr. 17)

$$\bar{x} = \bar{a}\cos\vartheta + \overline{\eta\,a}\sin\vartheta$$

folgt

$$\bar{v} = \frac{d\bar{x}}{d\tau} = [-\bar{a}\sin\vartheta + \overline{\eta\,a}\cos\vartheta]\frac{d\vartheta}{d\tau}$$

und hieraus

$$\overline{\overline{F}} = \overline{x\bar{v}} = \overline{x(\eta\,x)}\frac{d\vartheta}{d\tau}\,.$$

Denn den Ausdruck für den Geschwindigkeitsvektor kann man in die übersichtliche Form bringen:

$$\bar{v} = \overline{\eta\,x}\cdot\frac{d\vartheta}{d\tau}\,.$$

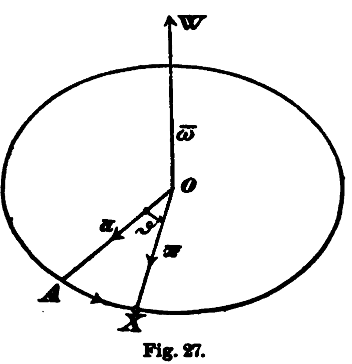


Fig. 27.

Die Anwendung der Entwicklungsformel auf $\overline{\overline{F}}$ gibt:

$$\overline{\overline{F}} = a^2\frac{d\vartheta}{d\tau}\cdot\bar{\eta}\,.$$

Wir betrachten jetzt den Vektor nullter Dimension (Fig. 27):

$$\bar{\omega} = \frac{d\vartheta}{d\tau}\cdot\bar{\eta} = \frac{d\bar{\vartheta}}{d\tau}\,,$$

welcher auf der Kreisfläche senkrecht steht. Er stellt die Winkelgeschwindigkeit des Radiusvektors nach Größe und Richtung dar. Sein Zusammenhang mit der Flächengeschwindigkeit ist bestimmt durch die Gleichung

$$\overline{\overline{F}} = a^2\cdot\bar{\omega}\,.$$

Diese Definition läßt sich auf beliebige Bahnen übertragen, indem man den unveränderlichen Radius a durch die Länge r des Radiusvektors ersetzt. Dann entsteht die allgemeine Gleichung

$$\overline{\overline{F}} = r^2\cdot\bar{\omega}\,,$$

worin $\bar{\omega}$ auch der Richtung nach veränderlich sein kann.

32. Harmonische Bewegung. In Fig. 28 bezeichnet $AEBO$ eine Horizontalebene, welche zur Ebene der Zeichnung senkrecht steht. Der Einheitsvektor $\bar{\eta}$ steht auf ihr im Punkte O

senkrecht. COD ist eine unter dem Winkel γ gegen AOB geneigte Ebene mit der Normalen $\bar{\nu}$, welche gleichfalls auf der Zeichenebene senkrecht steht. Beide Ebenen schneiden sich in der Linie OE, auf welcher der Einheitsvektor $\bar{\varepsilon}$ aufgetragen ist. Wir beschreiben jetzt in der Ebene COD einen Kreis mit dem Radius $a = 1$ um O als Mittelpunkt und projizieren denselben orthogonal auf die Horizontalebene AOB. Seine Gleichungen:

$$\bar{\varrho} = \bar{\varepsilon} \cos\vartheta + \overline{\nu\varepsilon} \cdot \sin\vartheta ,$$

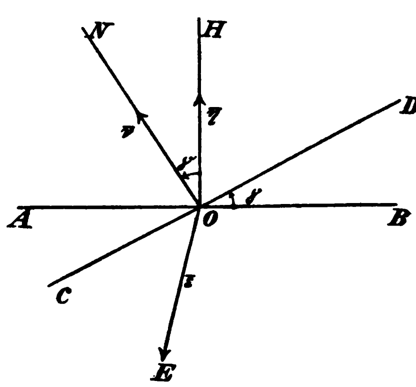


Fig. 28.

so daß der Winkel ϑ von dem festen Schenkel OE aus gerechnet ist. Nun ist

$$\overline{\eta\nu} = \sin\gamma \cdot \bar{\varepsilon} \quad \text{und} \quad \bar{\eta}\bar{\nu} = \cos\gamma .$$

Hieraus folgt

$$\overline{\eta(\eta\nu)} = \sin\gamma \cdot \overline{\eta\varepsilon} = \cos\gamma \cdot \bar{\eta} - \bar{\nu} ,$$

also

$$\bar{\nu} = \cos\gamma \cdot \bar{\eta} - \sin\gamma \cdot \overline{\eta\varepsilon} .$$

Jetzt bilde man

$$\overline{\nu\varepsilon} = \cos\gamma \cdot \overline{\eta\varepsilon} + \sin\gamma \cdot \bar{\eta}$$

und setzt diesen Ausdruck in die Gleichung für $\bar{\varrho}$ ein. Dann ergibt sich

$$\bar{\varrho} = \bar{\varepsilon} \cos\vartheta + \overline{\eta\varepsilon} \cdot \cos\gamma \sin\vartheta + \bar{\eta} \cdot \sin\gamma \sin\vartheta .$$

In der Achse OB liegt also die Komponente

$$\cos\gamma \sin\vartheta \cdot \overline{\eta\varepsilon}$$

und in der Achse OE: $\cos\vartheta \cdot \bar{\varepsilon}$.

Wir setzen jetzt $a\bar{\varepsilon} = \bar{a}$ und erhalten nach Fig. 29 für die Horizontalprojektion des Radiusvektors des schiefliegenden Kreises den Ausdruck

$$\bar{x} = \bar{a}\cos\vartheta + \overline{\eta\,\bar{a}} \cdot \cos\gamma\sin\vartheta\,.$$

Dies ist nach Nr. 17 die Gleichung einer **Ellipse**, wie auch ohne analytische Betrachtung aus den Elementen der Geometrie bekannt ist.

Durch Differenzierung nach der Zeit τ erhält man die Geschwindigkeit des projizierten Kreispunktes in der Form

$$\bar{v} = [-\bar{a}\sin\vartheta + \overline{\eta\,\bar{a}}\cos\gamma\cos\vartheta]\frac{d\vartheta}{d\tau}\,.$$

Wir setzen nun die Winkelgeschwindigkeit bei der Kreisbewegung konstant, nämlich $\frac{d\vartheta}{d\tau} = \omega$, dann wird $\vartheta = \omega\tau + \zeta$, wo ζ eine Integrationskonstante bedeutet. Sie wird zu Null, wenn für $\tau = 0$ auch $\vartheta = 0$ ist, was wir zunächst annehmen wollen. Für die Bahn und die Geschwindigkeit der Horizontalprojektion eines in dem schrägliegenden Kreise gleichmäßig umlaufenden Punktes gelten demnach die Gleichungen:

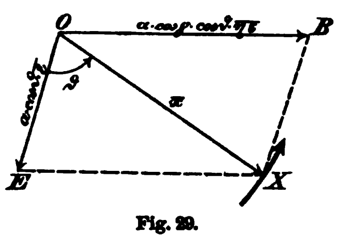


Fig. 29.

$$\bar{x} = \bar{a}\cdot\cos\omega\tau + \overline{\eta\,\bar{a}}\cdot\cos\gamma\sin\omega\tau$$

$$\bar{v} = [-\bar{a}\sin\omega\tau + \overline{\eta\,\bar{a}}\cdot\cos\gamma\cos\omega\tau]\cdot\omega\,.$$

Eine derartige Bewegung nennt man eine **einfach harmonische**, weil sie geeignet ist, fundamentale Erscheinungen in der Akustik und Optik auf elementare Art mathematisch zu beschreiben. Wir wollen diesen Sprachgebrauch in der folgenden Definition fixieren:

> *Bewegt sich ein Punkt gleichmäßig auf dem Umfang eines Kreises, dessen Ebene schräg liegt, so ist die Bewegung seiner Horizontalprojektion eine einfach harmonische.*

Wir betrachten jetzt noch den ausgezeichneten Fall, in dem die Kreisebene auf der Projektionsebene senkrecht steht.

Dann ist $\gamma = 90^0$, also

$$x = a \cos \omega \tau$$

oder allgemeiner

$$x = a \cos(\omega \tau + \zeta),$$

wenn wir die oben eingeführte Integrationskonstante nicht gleich Null setzen. Hier kann die vektorielle Bezeichnung wegbleiben, da die Bewegung in einer Geraden von bekannter Lage erfolgt.

Da der Kosinus nie größer als Eins werden kann, so schwingt der Punkt um die Nulllage 0 mit dem größten Ausschlag (Elongation) a vorwärts und rückwärts. Er geht durch die Nulllage, wenn $\cos(\omega \tau + \zeta) = 0$ wird, also $\omega \tau + \zeta = \frac{\pi}{2}$ ist. Hieraus ergibt sich die zugehörige Zeit

$$\tau^* = \frac{\frac{\pi}{2} - \zeta}{\omega}$$

und umgekehrt $\zeta = \frac{\pi}{2} - \omega \tau^*$. Jetzt ist ζ begrifflich bestimmt und man erhält

$$x = a \cos\left(\omega \tau - \omega \tau^* + \frac{\pi}{2}\right)$$

oder

$$x = a \sin \omega(\tau^* - \tau).$$

Zum Schluß wollen wir noch den Zeitverlauf τ_{00} einer vollständigen Schwingung (Periode) angeben. Sie ist ohne weiteres aus ω bekannt. Denn der Originalpunkt im Einheitskreis legt in der Zeiteinheit den Weg a zurück, braucht also zu einem vollen Umlauf die Zeit $\frac{2\pi}{\omega}$. Folglich ist die Periode

$$\tau_{00} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Aufgabe 24. Man berechne die Winkelgeschwindigkeit des Radiusvektors bei der Bewegung auf einer Schraubenlinie nach den Angaben der Aufgabe 18, wenn $c = 15$ (Meter/Sek.) ist, für $\vartheta = 0^0$, $\vartheta = 45^0$ und $\vartheta = 90^0$.

Aufgabe 25. Eine Bewegung erfolgt in gerader Linie nach dem Gesetz $x = b \cos \omega \tau + c \sin \omega \tau$. Man zeige, daß

dieselbe einfach harmonisch ist und bestimme die Epoche τ^* durch die Konstanten b und c.

Aufgabe 26. Für welche Werte der Anomalie ϑ erreicht die Flächengeschwindigkeit bei der Planetenbewegung (Nr. 30) ihren größten und kleinsten Wert? An welchen Stellen der Bahn wird der Mittelwert $v^* = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v\,d\vartheta$ der Geschwindigkeit erlangt?

33. Die Geschwindigkeitskurve (Hodograph). Hamilton hat den Verlauf des Geschwindigkeitsvektors in der Weise betrachtet, daß er sich denselben nicht von dem beweglichen Punkte ausgehend denkt, sondern seinen Anfangspunkt immer in den festen Bezugspunkt O versetzt. Dann beschreibt der Endpunkt dieses Vektors im allgemeinen eine Raumkurve, welche den Verlauf der Geschwindigkeit geometrisch darstellt. Wir wollen uns die Gleichung der Bahn wieder in der Parameterform

$$\bar{x} = \bar{f}(\vartheta)$$

gegeben vorstellen. Dann ist

$$\bar{v} = \frac{d\bar{f}(\vartheta)}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{d\tau}.$$

Die Parametergeschwindigkeit $\frac{d\vartheta}{d\tau}$ soll nun durch eine bestimmte analytische Beziehung

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = \psi(\vartheta)$$

mit dem Parameter verknüpft sein. Dann ist $\bar{v}$ vollständig bestimmt, nämlich

$$\bar{v} = \frac{d\bar{f}(\vartheta)}{d\vartheta} \cdot \psi(\vartheta).$$

Dies ist die Gleichung der Geschwindigkeitskurve, welche in besonderen Fällen eine einfache geometrische Deutung zuläßt, wie man aus den folgenden Beispielen ersieht.

Aufgabe 27. Man bestimme die Geschwindigkeitskurve für die elliptische Planetenbewegung und zeichne sie zusammen mit der Bahnkurve, um einen klaren Überblick über den Verlauf der Geschwindigkeit zu gewinnen. Die Maße können hierbei beliebig angenommen werden.

Aufgabe 28. Ebenso berechne man für die elliptische harmonische Bewegung, welche man auch in der Form $\bar{x} = \bar{a}\cos\vartheta + \overline{\eta a}\sin\vartheta\ (\vartheta = \omega\tau,\ \eta \gtrless 1)$ darstellen kann, die Geschwindigkeitskurve und diskutiere ihre Beziehung zur Bahn.

34. Der Beschleunigungsvektor eines Punktes. Während der Begriff der Geschwindigkeit im Altertum vollständig bekannt war, ist die Erkenntnis der fundamentalen Bedeutung des daraus abgeleiteten Begriffs der Beschleunigung eine Errungenschaft des 17. Jahrhundert. Sie trat erst ans Licht durch Galileis Entdeckung der Fall- und Wurfgesetze. Hier mußte man mit einer mathematisch geklärten Vorstellung der Beschleunigung operieren. Die Schranken für Keplers Bestrebungen, die Planetenbewegung vollständig kinematisch zu erklären, waren fast allein durch den Umstand bestimmt, daß er nicht auf den Gedanken kam, folgerichtig über den Begriff der Geschwindigkeit und ihres Momentes hinauszugehen. Dies gelang Galilei freilich auch nur in einem weit einfacheren Falle, so daß es Newton vorbehalten blieb, das Beschleunigungsgesetz bei der Planetenbewegung aufzustellen, aber nichtsdestoweniger wurde doch Galilei durch die prinzipielle Einführung des Beschleunigungsbegriffes und die Entdeckung eines einfachen Beschleunigungsgesetzes für die Fallbewegung der Begründer einer exakten mechanistischen Naturauffassung, die allen nachfolgenden Jahrhunderten immer neue Aufgaben in der gleichen Zielrichtung stellte. So gestaltete sich die moderne Mechanik zu einer weit ausgedehnten und vielseitig durchgearbeiteten Theorie der Beschleunigung und damit zur sicheren Grundlage der Physik und der physikalischen Chemie in ihrer heutigen Ausgestaltung.

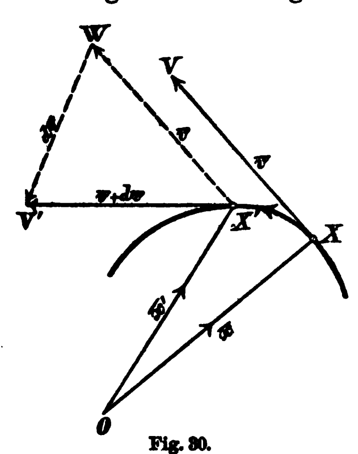


Fig. 30.

Die Elementarbeschleunigung $\bar{w}$ ist definiert durch die Gleichung

$$\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{d\tau} = \frac{d^2\bar{x}}{d\tau^2}.$$

In Fig. 30 stellt XV die Geschwindigkeit $\bar{v}$ zur Zeit τ und $X'V' = \bar{v} + d\bar{v}$ zur Zeit $\tau + d\tau$ dar, wenn man von der für das Auge notwendigen Auseinanderzerrung absieht. Es wird also $WV' = d\bar{v}$ und wir können unserer Definition jetzt den Ausdruck geben:

Der Vektor der Beschleunigung ist die auf die Zeiteinheit bezogene Änderung des Geschwindigkeitsvektors.

Hat man also, wie bei der Galileischen Fallbewegung:

$$\bar{v} = \bar{g}\tau + \bar{c},$$

so wird

$$\bar{w} = \bar{g},$$

also konstant.

35. Der Beschleunigungsvektor bei bekannter Bahn. Wir denken uns die Bahn in der Parameterform

$$\bar{x} = \bar{f}(\vartheta)$$

gegeben. Dann wird

$$\bar{v} = \frac{d\bar{x}}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{d\tau}$$

und

$$(1) \qquad \frac{d\bar{v}}{d\tau} = \bar{w} = \frac{d^2\bar{x}}{d\vartheta^2}\left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)^2 + \frac{d\bar{x}}{d\vartheta}\,\frac{d^2\vartheta}{d\tau^2}.$$

Es tritt also jetzt außer $\frac{d\vartheta}{d\tau}$ (Parametergeschwindigkeit) noch die Größe $\frac{d^2\vartheta}{d\tau^2}$ in den Ausdruck von $\bar{w}$ ein. Man nennt diese zweite Derivierte des Parameters ϑ nach der Zeit die „Parameterbeschleunigung".

Wir wollen nun diese Betrachtung zunächst auf die Kreisbewegung anwenden. Hier ist (Nr. 31):

$$\bar{v} = [-\bar{a}\sin\vartheta + \overline{\eta\,\bar{a}}\cos\vartheta]\frac{d\vartheta}{d\tau},$$

also

$$(1) \quad \bar{w} = -[\bar{a}\cos\vartheta + \overline{\eta\bar{a}}\sin\vartheta]\left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)^2 + [-\bar{a}\sin\vartheta + \overline{\eta\bar{a}}\cos\vartheta]\frac{d^2\vartheta}{d\tau^2}.$$

Die Parametergeschwindigkeit ist jetzt zur Winkelgeschwindigkeit des Radiusvektors und die Parameterbeschleunigung zur entsprechenden Winkelbeschleunigung geworden. Daher der Satz:

Man kennt den Vektor der Beschleunigung bei der Kreisbewegung, wenn sowohl die Winkelgeschwindigkeit, als auch die Winkelbeschleunigung des Radiusvektors gegeben ist.

Aus der Formel für $\bar{w}$ folgen sofort die Ausdrücke für die Komponenten (w_1, w_2) in bezug auf die Achsen $\bar{a}$ und $\overline{\eta a}$, nämlich

$$w_1 = -a\left[\cos\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)^2 + \sin\vartheta\,\frac{d^2\vartheta}{d\tau^2}\right], \tag{2}$$

$$w_2 = -a\left[\sin\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)^2 - \cos\vartheta\,\frac{d^2\vartheta}{d\tau^2}\right]. \tag{3}$$

In der Gleichung für $\bar{v}$ setzen wir jetzt nach Nr. 31:

$$\frac{d\vartheta}{d\tau}\cdot\bar{\eta} = \bar{\omega}.$$

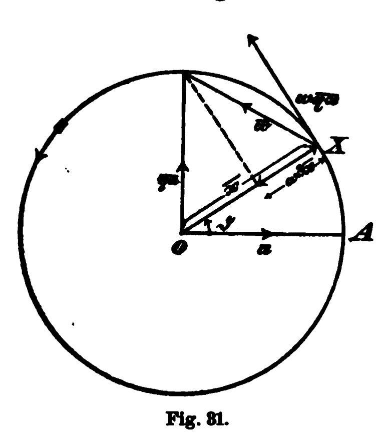


Fig. 31.

Dann erhält $\bar{v}$ die übersichtliche Form:

$$\bar{v} = \overline{\omega x} \tag{4}$$

und hieraus entsteht durch Differenzierung nach der Zeit

$$\bar{w} = \overline{\omega v} + \overline{\dot{\omega} x}, \tag{5}$$

wenn wir zur Abkürzung die Newtonsche Bezeichnung anwenden

$$\bar{\dot{\omega}} = \frac{d\bar{\omega}}{d\tau}.$$

Die Einsetzung von $\bar{v}$ ergibt noch

$$\bar{w} = \overline{\omega(\omega x)} + \overline{\dot{\omega} x} \tag{6}$$

oder nach der Entwicklungsformel das explizite Resultat:

$$\bar{w} = -\omega^2\cdot\bar{x} + \overline{\dot{\omega} x}. \tag{7}$$

Schreibt man die letzte Gleichung:

$$\bar{w} = -\omega^2\cdot\bar{x} + \dot{\omega}\cdot\overline{\eta x},$$

so erkennt man noch deutlicher die Richtungen der Komponenten. Der Betrag $-\omega^2\cdot\bar{x}$, welchen man auch als

Zentripetalbeschleunigung bezeichnet, ist nach dem Mittelpunkt des Kreises (Fig. 31) gerichtet, der zweite Teil $\dot{\omega} \cdot \overline{\eta x}$ hat die Richtung der Tangente in der Umlaufsrichtung, wie man nach der Korkzieherregel sofort erkennt. $\overline{\eta}$ steht, wie vorausgesetzt, auf der Kreisebene senkrecht nach oben. Wir können also jetzt den Satz aussprechen, welchen wir Huyghens verdanken:

Bewegt sich ein Punkt auf einer Kreisperipherie, so kann man den Vektor der ganzen Beschleunigung für jede Lage des Punktes in zwei Komponenten zerlegen, von denen die eine nach dem Mittelpunkt des Kreises gerichtete dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit multipliziert mit dem Radius gleich ist, während die andere in die Richtung der Tangente fällt und als Intensität das Produkt aus Winkelbeschleunigung und Radius besitzt.

Es liegt also hier eine Zerlegung des Beschleunigungsvektors nach der Normalen und nach der Tangente der Bahn vor. Jetzt werden wir zeigen, wie sich diese Zerlegung allgemein gestaltet.

36. Zerlegung des Beschleunigungsvektors nach der Tangente und der Normalen der Bahn. Diese fundamentale Zerlegung der Beschleunigung im allgemeinen Falle, welche wir gleichfalls Huyghens verdanken, war für die Entwicklung der elementaren Kinematik im 17. Jahrhundert selbstverständlich von der größten Bedeutung. Sie gab namentlich Newton die Handhabe, um die Beschleunigung der Planetenbewegung auf Grund der Keplerschen Gesetze zu bestimmen. Wir nehmen als Ausgangspunkt die identische Gleichung

$$\overline{v} = v \cdot \overline{\sigma},$$

wo $\overline{\sigma}$ den Einheitsvektor auf der Tangente bedeutet.

Hieraus bilden wir

$$\overline{w} = \frac{dv}{d\tau} \cdot \overline{\sigma} + v \cdot \frac{d\overline{\sigma}}{d\tau}$$

oder

$$\overline{w} = \frac{dv}{d\tau} \cdot \overline{\sigma} + v^2 \frac{d\overline{\sigma}}{ds}.$$

Nun ist nach Nr. 26:

$$\frac{d\overline{\sigma}}{ds} = \frac{1}{r} \cdot \overline{\nu}.$$

Wir haben also die verlangte Zerlegung in der Form:

$$\bar{w} = \frac{dv}{d\tau} \cdot \bar{\sigma} + \frac{v^2}{r} \cdot \bar{\nu},$$

oder in Worten:

Zerlegt man den Vektor der Beschleunigung nach der Tangente und nach der Hauptnormale der Bahn, so ist die erste Komponente die Änderung der Intensität des Geschwindigkeitsvektors bezogen auf die Zeiteinheit $\left(\frac{dv}{d\tau}\right)$, *die zweite das Verhältnis des Quadrats der Geschwindigkeit zu dem Biegungsradius der Bahn* $\left(\frac{v^2}{r}\right)$.

37. Beschleunigung bei der harmonischen Bewegung. Für die elliptische harmonische Bewegung ist (Nr. 32):

$$\bar{x} = \bar{a} \cos\vartheta + \overline{\eta\, a} \sin\vartheta,$$

wo

$$\eta = \cos\gamma$$

zu setzen ist. Mithin wird

$$\bar{v} = (-\bar{a} \sin\vartheta + \overline{\eta\, a} \cos\vartheta) \frac{d\vartheta}{d\tau}.$$

Nun ist aber

$$\vartheta = \omega\tau$$

also

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = \omega.$$

Dementsprechend wird

$$\bar{v} = (-\bar{a} \sin\vartheta + \overline{\eta\, a} \cos\vartheta) \cdot \omega.$$

Folglich wegen der Unveränderlichkeit von ω:

$$\bar{w} = -(\bar{a} \cos\vartheta + \overline{\eta\, a} \sin\vartheta) \cdot \omega^2$$

oder

$$\bar{w} = -\omega^2 \cdot \bar{x}.$$

Bei der elliptischen harmonischen Bewegung ist die Beschleunigung beständig gegen den Mittelpunkt der Bahn gerichtet und dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit des Radiusvektors in der Kreisbahn proportional.

Anmerkung. Man beachte, daß hier $\bar{w}$ nicht in die Normale der Bahn fällt.

38. Die Beschleunigung bei der elliptischen Planetenbewegung. Als Ausgangspunkt für diese Betrachtung nehmen wir den Ausdruck von $\bar{v}$ in Nr. 30 und schreiben denselben in der Form

$$\bar{v} = \frac{r^2}{p^2}[\bar{p}(\varepsilon + \cos\vartheta) - \overline{p\eta}\sin\vartheta] \cdot \frac{d\vartheta}{d\tau}.$$

Nach dem zweiten Keplerschen Gesetz ist:

$$r^2 \frac{d\vartheta}{d\tau} = D,$$

wo D eine Flächenkonstante bedeutet. Jetzt wird

$$\bar{v} = \frac{D}{p^2}[\bar{p}(\varepsilon + \cos\vartheta) - \overline{p\eta}\sin\vartheta].$$

Dieser Ausdruck läßt sich bequem nach der Zeit differentiieren. Man erhält:

$$\bar{w} = -\frac{D}{p^2}[\bar{p}\cdot\sin\vartheta + \overline{p\eta}\cdot\cos\vartheta]\frac{d\vartheta}{d\tau}$$

oder

$$\bar{w} = -\frac{D^2}{p^2 r^2}(\bar{p}\sin\vartheta + \overline{p\eta}\cdot\cos\vartheta).$$

Nun ist aber nach Nr. 30

$$(1 + \varepsilon\cos\vartheta)\cdot\bar{x} = \bar{p}\sin\vartheta + \overline{p\eta}\cos\vartheta$$

die Parametergleichung der elliptischen Bahn. Folglich wird

$$\bar{w} = -\frac{D^2}{p^2 r^2}(1 + \varepsilon\cos\vartheta)\cdot\bar{x}$$

oder

$$\bar{w} = -\frac{D^2}{p}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\bar{x}}{r}.$$

Hierin ist $\frac{\bar{x}}{r}$ ein Einheitsvektor in der Richtung des Radiusvektors OX (Fig. 26). Folglich wird

$$w = \frac{D^2}{p}\cdot\frac{1}{r^2}.$$

Dieses für die astronomische Mechanik fundamentale Resultat lautet also:

Bei der elliptischen Planetenbewegung, soweit sie durch die beiden ersten Keplerschen Gesetze) bestimmt ist, fällt der Beschleunigungsvektor immer in die Richtung des Radiusvektors und zielt nach der Sonne (Brennpunkt). Die Intensität der Beschleunigung ist dem Quadrat des Abstandes des Planeten von der Sonne umgekehrt proportional. (Newton.)*

In dieser Form des Newtonschen Gesetzes ist selbstverständlich nur die kinematische Auffassung enthalten. Als Kraftgesetz werden wir dasselbe in der Dynamik betrachten.

Aufgabe 29. Man betrachte die Planetenbahnen als Kreise mit der Sonne im Mittelpunkt und setze die Gültigkeit der drei Keplerschen Gesetze voraus. Unter diesen Annahmen soll der Ausdruck für den Beschleunigungsvektor gefunden werden. Man zeige insbesondere aus dem dritten Keplerschen Gesetze, daß der Faktor $\frac{D^2}{p}$ für alle Planeten denselben Wert hat.

Aufgabe 30. Welches ist die Beschleunigung der durch die Gleichung $x = a \cdot e^{-\varkappa\tau} \cos(\omega\tau + \varepsilon)$ definierten geradlinigen Bewegung? Man drücke w unter Elimination von a und ε durch x und $\dot{x}$ aus. Hier bedeutet e die Basis der natürlichen Logarithmen und $\varkappa$ eine positive Zahlenkonstante. Diese Bewegung ist realisiert durch ein einfaches Pendel, welches einen Luftwiderstand proportional der Geschwindigkeit erfährt.

39. Das Moment des Beschleunigungsvektors. Flächenbeschleunigung. Nach den langen Ausführungen über das Moment der Geschwindigkeit in Nr. 30 können wir uns hier bei dem analogen Begriff für die Beschleunigung kurz fassen. Aus

$$\overline{F} = \overline{x\,v}$$

folgt unmittelbar durch Differenzierung nach der Zeit

$$\overline{G} = \frac{d\overline{F}}{d\tau} = \overline{x\,w}\,.$$

Dies ist der analytische Ausdruck für das Moment der Beschleunigung. Auch hier ist die Deutung dieses

*) Erstes Gesetz: Die Planeten bewegen sich in Ellipsen um die Sonne als Brennpunkt. Zweites Gesetz: Die Flächengeschwindigkeit ist konstant. Drittes Gesetz: Für zwei Planeten verhalten sich die Quadrate der Umlaufszeiten wie die dritten Potenzen der mittleren Entfernungen (halbe große Bahnachsen).

Momentes als Flächenbeschleunigung so naheliegend und einfach, daß wir dieselbe dem Leser überlassen und sogleich zu einigen Übungsbeispielen übergehen.

Aufgabe 31. Ein Rad von 2 m Durchmesser mache 200 Touren in der Minute. Wie groß ist die Flächengeschwindigkeit und Flächenbeschleunigung (in m/sek) eines Punktes seines Umfanges in bezug auf einen exzentrischen Punkt O in seiner Ebene, der vom Mittelpunkt C des Rades die Entfernung $e = 0{,}1$ m hat?

Aufgabe 32. Die maximale Fördergeschwindigkeit in einem Schacht sei 8 m/sek, die Beschleunigung eines Peripheriepunktes der Fördertrommel beim Anlauf konstant und gleich 0,4 m/sek. Die Bremsung beim Auslauf der Fahrt sei ebenfalls konstant und der negativen Beschleunigung des Förderkorbes vom Betrage 0,6 m/sek entsprechend. Wann wird die angegebene maximale Fördergeschwindigkeit erreicht? Wann muß die Bremsung beginnen, wenn die Tiefe des Schachtes 550 m beträgt? Wie groß ist die ganze Fahrzeit? Wie groß ist die maximale Winkelgeschwindigkeit der Fördertrommel (ohne Rücksicht auf das Vorzeichen)? Welches sind die Flächenbeschleunigungen eines Peripheriepunktes der Trommel in der Anlauf- und Auslaufperiode, wenn ihr Durchmesser 6 m beträgt?

40. Die Winkelabweichung zwischen den Vektoren der Geschwindigkeit und der Beschleunigung. Man findet dieselbe sehr einfach aus der Huyghenschen Gleichung

$$\bar{w} = \frac{dv}{d\tau} \cdot \bar{\sigma} + \frac{v^2}{r} \cdot \bar{\nu} .$$

Hieraus folgt durch Momentbildung

$$\overline{v\,w} = \frac{v^3}{r} \cdot \bar{\eta} ; \tag{1}$$

denn es ist

$$\overline{\sigma\nu} = \bar{\eta}$$

nach Nr. 27.

Die Gleichung (1), welche namentlich von Somoff in seiner Kinematik (deutsche Übersetzung von Ziwet, Leipzig 1878) eingehend untersucht ist, wurde später auf Systeme übertragen. Aus ihr ergibt sich auch sofort ein kinematischer Ausdruck für die Biegung einer Bahn, nämlich

$$\frac{1}{r} = \frac{\overline{v\,w}}{v^3} . \tag{2}$$

Wir wollen zunächst diese wichtige Formel etwas eingehender betrachten. Man erkennt ohne weiteres daraus, daß die Biegung einer Bahn nur dann verschwindet, wenn der Vektor der Beschleunigung mit dem Vektor der Geschwindigkeit gleichgerichtet ist. Auch der umgekehrte Schluß ist gültig. Folglich haben wir den Satz:

Nur bei einer geradlinigen Bewegung fällt der Vektor der Beschleunigung in die Tangente der Bahn. Bei allen krummlinigen Bahnen ist der Winkel zwischen der Tangente und dem Beschleunigungsvektor bestimmt durch die Gleichung:

$$\sin(\bar{v}/\bar{w}) = \frac{v^2}{w}\,\frac{1}{r}\,.$$

Ferner ergibt sich aus der Gleichung (2) ein brauchbarer Ausdruck für die Biegung einer Kurve, deren Gleichung in der Parameterform gegeben ist. Da nämlich die Zeit τ selbst ein solcher Parameter für den analytischen Ausdruck von $\bar{x}$ ist, so wird auch, wenn wir in Gleichung (2) τ durch ϑ ersetzen:

$$\frac{1}{r} = \frac{\overline{\frac{dx}{d\vartheta}\cdot\frac{d^2x}{d\vartheta}}}{\left(\frac{ds}{d\vartheta}\right)^3}\,. \tag{3}$$

41. Biegung der parabolischen Wurfbahn. In dem Galileischen Wurfproblem ist $\bar{w} = \bar{g}$, also $\bar{v} = \bar{g}\cdot\tau + \bar{c}$, wenn $\bar{c}$ die Anfangsgeschwindigkeit nach Größe und Richtung vorstellt. Folglich wird

$$\overline{v\,w} = \overline{c\,g}$$

und deshalb nach Gleichung (2) in Nr. 40:

$$\frac{1}{r} = \frac{\overline{c\,g}}{v^3}\,.$$

Man erkennt hieraus, daß bei der parabolischen Wurfbahn die Biegung mit zunehmender Geschwindigkeit rasch abnimmt.

42. Zusammenhang der Bahnwindung mit der Beschleunigung. Wir bringen die Gleichung (1) von Nr. 40 in die Form:

$$r\cdot\overline{v\,w} = v^3\cdot\bar{\eta}\,.$$

Jetzt differentiieren wir dieselbe nach der Zeit und erhalten, indem wir wieder zur Abkürzung $\frac{d\bar{w}}{d\tau} = \bar{\dot{w}}$ setzen:

$$r \cdot \overline{v\,\dot{w}} + \frac{dr}{d\tau} \cdot \overline{v\,w} = v^3 \cdot \frac{d\bar{\eta}}{d\tau} + 3\,v^2 \frac{dv}{d\tau} \cdot \bar{\eta}\,.$$

Hieraus bilden wir das Arbeitsprodukt mit $\bar{w}$. Dies ergibt:

$$r \cdot \bar{w}\,\overline{v\,\dot{w}} = v^3 \cdot \bar{w}\,\frac{d\bar{\eta}}{d\tau} + 3\,v^2 \frac{dv}{d\tau} \cdot \bar{w}\,\bar{\eta}\,.$$

Nun fällt aber $\bar{w}$ nach Nr. 36 immer in die Schmiegungsebene der Bahn, steht also auf der Binormalen senkrecht. Aus diesem Grunde wird:

$$r \cdot \bar{w}\,\overline{v\,\dot{w}} = v^3 \cdot \bar{w}\,\frac{d\bar{\eta}}{d\tau}\,.$$

Nach Nr. 27 hat man weiter

$$\frac{d\bar{\eta}}{ds} = \frac{1}{r'} \cdot \bar{\nu}\,,$$

wenn r' den Radius der Windung bezeichnet.

Also wird

$$r \cdot \bar{w}\,\overline{v\,\dot{w}} = \frac{v^4}{r'}\left(\frac{dv}{d\tau} \cdot \bar{\sigma} + \frac{v^2}{r} \cdot \bar{\nu}\right) \cdot \bar{\nu}\,,$$

das heißt

$$\frac{1}{r'} = r^2\,\frac{\bar{w}\,\overline{v\,\dot{w}}}{v^6}\,,$$

wofür man auch mit Benutzung der Vertauschungsformel schreiben kann:

$$\frac{1}{r'} = -r^2\,\frac{\bar{v}\,\overline{w\,\dot{w}}}{v^6}\,. \tag{1}$$

Hieraus ergibt sich sofort die geometrische Formel

$$\frac{1}{r'} = -r^2\,\frac{\frac{d\bar{x}}{d\vartheta} \cdot \overline{\frac{d^2x}{d\vartheta^2}\,\frac{d^3x}{d\vartheta^3}}}{\left(\frac{ds}{d\vartheta}\right)^6}\,, \tag{2}$$

welche man als eine Verallgemeinerung der Gleichung (3) in Nr. 27 betrachten kann.

Die Gleichung (1) stellt den Zusammenhang zwischen Biegung und Windung der Bahn mit den kinematischen Vektoren $\bar{v}$, $\bar{w}$ und $\frac{d\bar{w}}{d\tau}$ dar. Hier ist ein neuer Vektor $\frac{d\bar{w}}{d\tau}$, welcher die Änderung des Beschleunigungsvektors $\bar{w}$, bezogen auf die Zeiteinheit, angibt, eingetreten. Man hat ihn in den Lehrbüchern der Kinematik als „Beschleunigung zweiter Ordnung“ bezeichnet. Die Beachtung der Bahnwindung geht also in kinematischem Sinne über den ursprünglichen Vorstellungskreis Galileis, der sich auf die fundamentalen Größen $\bar{v}$ und $\bar{w}$ beschränkte, hinaus. Sehr ausführlich haben sich Résal*), Schell**) und Somoff***) mit der systematischen Theorie der Beschleunigungen höherer Ordnung beschäftigt. Da wir hier auf diese Untersuchungen nicht eingehen können, so verweisen wir diejenigen Leser, welche ein besonderes Interesse für die geometrische Seite der Kinematik haben, auf die unten genannten Lehrbücher und auf die Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Artikel Schoenfließ und Grübler, Band IV, 3. Leipzig 1902.

Wir ziehen aus Gleichung (1) noch die naheliegende Folgerung:

Eine Bewegung, bei welcher die Beschleunigung nach Größe und Richtung konstant ist, erfolgt notwendigerweise in einer ebenen Bahn.

Aufgabe 33. Man beweise den letzten Satz unmittelbar aus dem Integral $\bar{x} = \frac{1}{2}\bar{g}\cdot\tau^2 + \bar{c}\cdot\tau + \bar{a}$ der Gleichung

$$\bar{w} = \frac{d^2\bar{x}}{d\tau^2} = \bar{g}\,.$$

Aufgabe 34. Nach Gleichung (1) ist der Inhalt des Parallepipeds aus den drei Vektoren $\bar{v}$, $\bar{w}$ und $\frac{d\bar{w}}{d\tau}$ immer gleich $-\left(\frac{v^2}{r}\right)^2\frac{v^2}{r'}$. Man zeige, daß bei der gleichförmigen Bewegung auf der gewöhnlichen Schraubenlinie der Rauminhalt dieses Parallepipeds unverändert bleibt.

---

*) Résal, Cinématique pure. Paris 1862.

**) Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, 2. Aufl. Leipzig 1879/80.

***) Somoff, Kinematik, deutsche Übersetzung von Ziwet. Leipzig 1878.

43. Bewegung eines Punktes bei gleichmäßig veränderlicher Beschleunigung. Gehen wir von der Gleichung der Wurfbewegung noch einen Schritt weiter, so kommen wir auf die Vorstellung, daß die neue Bewegungsform durch eine gleichmäßig veränderliche Beschleunigung charakterisiert ist. Die Bahn liegt jetzt im allgemeinen nicht mehr in einer Ebene, sondern zeigt die charakteristische Eigenschaft der Biegung und Windung der Raumkurven. Wir wollen deshalb diese Größen unter der Voraussetzung

$$\frac{d\bar{w}}{d\tau} = \bar{h} \tag{1}$$

darstellen. Die Integrationen ergeben der Reihe nach

$$\bar{w} = \bar{h}\tau + \bar{g}\,, \quad \bar{v} = \tfrac{1}{2}\bar{h}\tau^2 + \bar{g}\cdot\tau + \bar{c}$$

und

$$\bar{x} = \tfrac{1}{6}\bar{h}\cdot\tau^3 + \tfrac{1}{2}\bar{g}\cdot\tau^2 + \bar{c}\cdot\tau + \bar{a}\,,$$

worin die gerichteten Größen $\bar{h}$, $\bar{g}$, $\bar{c}$, $\bar{a}$ sämtlich konstant sind. $\bar{a}$ hat keine kinematische Bedeutung, kann also weggelassen werden. Unsere Bewegung ist demnach durch die drei Konstanten $\bar{h}$, $\bar{g}$, $\bar{c}$ vollständig bestimmt. Wir bilden zunächst

$$v^2 = \tfrac{1}{4}h^2\tau^4 + \bar{h}\bar{g}\cdot\tau^3 + (\bar{h}\bar{c} + g^2)\cdot\tau^2 + 2\bar{g}\bar{c}\cdot\tau + c^2$$

und darauf

$$\overline{vw} = \tfrac{1}{2}\overline{gh}\cdot\tau^2 + \overline{ch}\cdot\tau + \overline{cg}\,.$$

Jetzt kennt man bereits den Verlauf der Bahnbewegung nach der Gleichung (2) in Nr. 40:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\overline{vw}^2}{v^6}\,. \tag{2}$$

Zur Bestimmung der Bahnwindung ist noch der Ausdruck von $\bar{\dot{w}}\,\overline{vw}$ zu entwickeln. Dies gibt aber sofort:

$$\bar{\dot{w}}\,\overline{vw} = \bar{h}\,\overline{cg}\,,$$

also eine vollständig bekannte, von der Zeit unabhängige Größe. Das Maß der Windung

$$\frac{1}{r'} = -r^2\frac{\bar{\dot{w}}\,\overline{vw}}{v^6} = -r^2\frac{\bar{h}\,\overline{cg}}{v^6}$$

oder

(3)
$$\frac{1}{r'} = -\frac{\bar{h}\,\overline{c\,g}}{v\,w^2}$$

ist hier eine bekannte Funktion der Zeit.

Wir wollen nun in dem Achsenkreuz (Fig. 32) die kinematischen Konstanten speziell orientieren, indem wir setzen

$$g_1 = 0\,, \qquad g_2 = -g\,, \qquad g_3 = 0\,,$$
$$h_1 = 0\,, \qquad h_2 = 0\,, \qquad h_3 = h\,,$$
$$c_1 = c \cdot \cos\alpha\,, \quad c_2 = c \cdot \sin\alpha\,, \quad c_3 = 0\,.$$

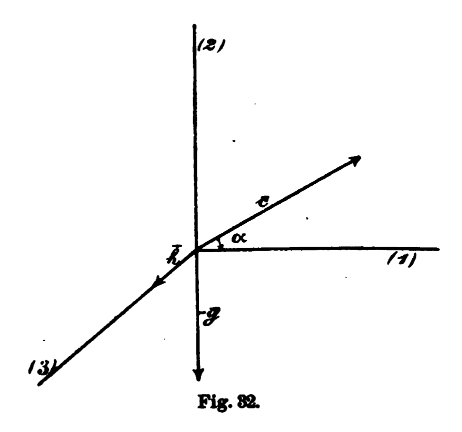


Fig. 32.

Die in Betracht kommenden Momente und Arbeitsprodukte berechnet man am raschesten und sichersten nach dem folgenden unmittelbar verständlichen Schema:

	1	2	3	1
$\bar{c}$	$c \cdot \cos\alpha$	$c \cdot \sin\alpha$	0	$c \cdot \cos\alpha$
$\bar{g}$	0	$-g$	0	0
$\bar{h}$	0	0	h	0
$\overline{c\,g}$	0	0	$-g c \cos\alpha$	—
$\overline{c\,h}$	$h c \sin\alpha$	$-h c \cdot \cos\alpha$	0	—
$\overline{g\,h}$	$-g h$	0	0	—

$$\overline{ch}\cdot\overline{ch} = h^2c^2\,,\quad \overline{ch}\cdot\overline{gh} = -h^2gc\sin\alpha\,,\quad \overline{ch}\cdot\overline{cg} = 0\,,$$
$$\overline{cg}\cdot\overline{cg} = c^2g^2\cos^2\alpha\,,\quad \bar{h}\cdot\overline{cg} = -hgc\cdot\cos\alpha\,,\quad \overline{gh}\cdot\overline{gh} = g^2h^2\,.$$

Mit diesen besonderen Werten erhält man

$$\begin{aligned}\overline{vw^2} &= \tfrac{1}{4}\overline{gh}^2\cdot\tau^4 + \overline{gh}\cdot\overline{ch}\cdot\tau^3 + \overline{gh}\cdot\overline{cg}\cdot\tau^2 \\ &\quad + 2\,\overline{ch}\cdot\overline{cg}\cdot\tau + \overline{cg}^2 + \overline{ch}^2\cdot\tau^2 \\ &= \tfrac{1}{4}g^2h^2\cdot\tau^4 - h^2gc\sin\alpha\cdot\tau^3 + h^2(c^2 - gc\sin\alpha)\tau^2 \\ &\quad + c^2g^2\cos^2\alpha\,.\end{aligned}$$

Das Maß der Bahnwindung wird demnach:

$$\frac{1}{r'} = \frac{-hgc\cdot\cos\alpha}{h^2[\tfrac{1}{4}g^2\cdot\tau^4 - gc\sin\alpha\cdot\tau^3 + (c^2 - gc\sin\alpha)\tau^2] + c^2g^2\cos^2\alpha}$$

und die Seitenabweichung:

$$x_3 = \tfrac{1}{6}h\cdot\tau^3\,.$$

Aufgabe 35. Man setze in den oben entwickelten Formeln $c = 600$ m/sek, $g = 9{,}81$ m/sek und $h = 0{,}01$ m/sek und berechne x_1, x_2, x_3, $\frac{1}{r}$ und $\frac{1}{r'}$ für $\tau = 1, 2, \ldots 10$ Sek. Dann entwerfe man auf m/m-Papier den Grundriß aus x_1, x_3 und den Aufriß aus $x_2\,x_1$.

Durch derartige Übungen gewöhnt man sich am besten an eine klare explizite Auffassung freier Bewegungen im Raume. Wer von der Mühe der vollständigen — d. h. numerischen und graphischen — Durchführung zurückscheut, kann sicher sein, daß er in dem Falle, wo eine ähnliche Aufgabe in der Praxis an ihn herantritt, machtlos dasteht und vor allem die Schwierigkeit gedankenlos überschätzt.

B) Bewegung des Punktes auf einer Fläche.

44. Ebene Polarkoordinaten. Wir gehen von der Kreisgleichung

$$\bar{x} = \bar{a}\cos\vartheta + \overline{\eta\, a}\sin\vartheta$$

aus und setzen darin $a\,\varrho = r$ an Stelle von a. Die Länge r betrachten wir jetzt als eine veränderliche Größe, so daß wir hier nicht einen bestimmten Kreis ins Auge fassen, sondern die ganze Schar aller konzentrischen Kreise, welche sich dem Kreise mit dem festen Radius a von innen und

von außen anschließen (Fig. 33). Die Koordinaten eines beliebigen Punktes X der Ebene sind jetzt der Winkel ϑ

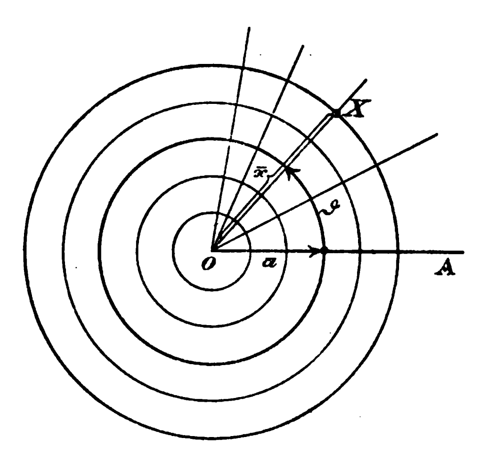


Fig. 33.

und der Radiusvektor r oder, wenn man Größen gleicher Dimensionen nehmen will, die Zahlen ϑ und ϱ.

45. Ausdruck der Geschwindigkeit in ebenen Polarkoordinaten. Relative Bewegung. Wir schreiben jetzt die Gleichung des Kreises mit veränderlichem Radius in der Form

$$\overline{x} = a(\overline{\alpha} \cos\vartheta + \overline{\eta\,\alpha} \sin\vartheta) \cdot \varrho \,,$$

indem wir einen Einheitsvektor $OE = \overline{\alpha}$ in der Richtung der horizontalen Achse (Fig. 34) benutzen. Dann ergibt sich sofort

$$\overline{v} = a(\overline{\alpha} \cos\vartheta + \overline{\eta\,\alpha} \sin\vartheta) \frac{d\varrho}{d\tau} + a(-\overline{\alpha} \sin\vartheta + \overline{\eta\,\alpha} \cos\vartheta)\, \varrho \frac{d\vartheta}{d\tau}$$

oder kürzer

$$(1) \qquad \overline{v} = \frac{\overline{x}}{\varrho} \frac{d\varrho}{d\tau} + \overline{\eta\,x} \cdot \frac{d\vartheta}{d\tau} \,.$$

Bei Benutzung der Strecke r als Koordinate wird

$$(2) \qquad \overline{v} = \frac{\overline{x}}{r} \frac{dr}{d\tau} + \overline{\eta\,x} \cdot \frac{d\vartheta}{d\tau} \,.$$

Nach dieser Gleichung zerfällt $\bar{v}$ in zwei Komponenten, von denen die eine im Betrage $\frac{dr}{d\tau}$ in die Richtung des Radiusvektors fällt, während die andere im Betrage $r\frac{d\vartheta}{d\tau}$ senkrecht hierzu steht. Nach dem Vorgange Clairauts*) (1713—1765) fassen wir nun auch die Bewegung des Punktes X in der Ebene als eine zusammengesetzte auf, indem wir uns den Radiusvektor als eine einseitig unbegrenzte Röhre vorstellen, in welcher der bewegliche Punkt dauernd eingeschlossen ist, so daß er darin nur vorwärts und rückwärts gleiten kann. Gleichzeitig soll aber die Röhre um den festen Punkt O (Fig. 33a) rotieren. Bei dieser Anschauung nennt man die Größe

$$\frac{dr}{d\tau}\cdot\frac{\bar{x}}{r}$$

die relative Geschwindigkeit des Punktes X und den zweiten Vektor

$$\frac{d\vartheta}{d\tau}\cdot\overline{\eta x}$$

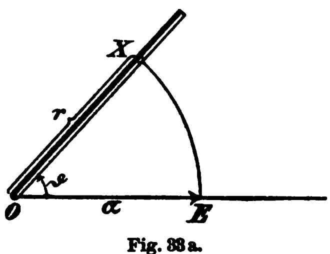


Fig. 33a.

seine Führungsgeschwindigkeit. $\bar{v}$ selbst bezeichnet man zur Unterscheidung von diesen Komponenten als absolute Geschwindigkeit. Der Punkt X wird also von der rotierenden Röhre gerade so geführt, als ob er während eines Augenblickes mit ihr fest verbunden wäre. Unabhängig hiervon besitzt er innerhalb der Röhre seine relative Geschwindigkeit.

Setzen wir zur schärferen Hervorhebung dieser Anschauung vorübergehend

$$\frac{dr}{d\tau}\cdot\frac{\bar{x}}{r}=\frac{\mathfrak{d}\bar{x}}{\mathfrak{d}\tau}, \tag{3}$$

so deutet das neue Symbol, welches wir auch später bei der allgemeinen Entwicklung der Lehre von der relativen Bewegung wieder benutzen, offenbar eine Differenzierung des Vektors $\bar{x}$ an, bei welcher er an den linearen Raum der

*) Man vergleiche Bertrand, Sur la théorie des mouvements relatifs. Journ. de Liouville, Bd. 24. 1847.

Röhre gebunden ist. Jetzt wird

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \bar{v} = \overline{\omega x} + \frac{\mathfrak{d}\bar{x}}{\mathfrak{d}\tau}. \tag{4}$$

Die absolute Geschwindigkeit ist also die geometrische Summe der Führungsgeschwindigkeit und der relativen Geschwindigkeit.

46. Die Beschleunigung in ebenen Polarkoordinaten. Coriolis-Beschleunigung. Zunächst lassen wir die Vorstellung der relativen Bewegung wieder fallen und differentiieren den expliziten Ausdruck

$$\bar{v} = \bar{x}\frac{\dot{r}}{r} + \overline{\eta x}\cdot\dot{\vartheta},$$

wo zur Abkürzung $\dot{r} = \frac{dr}{d\tau}$ und $\dot{\vartheta} = \frac{d\vartheta}{d\tau}$ gesetzt ist, ohne Rücksicht auf die kinematische Deutung der auftretenden Glieder vollständig nach der Zeit. Dies gibt

$$\bar{w} = \bar{x}\frac{r\ddot{r} - \dot{r}^2}{r^2} + \bar{v}\frac{\dot{r}}{r} + \overline{\eta x}\cdot\ddot{\vartheta} + \overline{\eta v}\cdot\dot{\vartheta},$$

indem wir die Newtonsche Bezeichnung der Zeitderivierten konsequent beibehalten.

Setzt man noch den Wert von $\bar{v}$ ein und ordnet, so erhält man für den Beschleunigungsvektor den Ausdruck:

$$\bar{w} = \bar{x}\left[\frac{\ddot{r}}{r} - \dot{\vartheta}^2\right] + \overline{\eta x}\left[\frac{2}{r}\dot{r}\dot{\vartheta} + \ddot{\vartheta}\right]. \tag{4a}$$

Der Vektor der Beschleunigung zerfällt also in zwei aufeinander senkrecht stehende Komponenten von der Intensität

$$w_r = \frac{d^2r}{d\tau^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)^2 \tag{5}$$

und

$$w_\vartheta = r\frac{d^2\vartheta}{d\tau^2} + 2\frac{dr}{d\tau}\cdot\frac{d\vartheta}{d\tau}, \tag{6}$$

von denen die erste in die Richtung des Radiusvektors, die zweite in eine hierzu normale Richtung $(\overline{\eta\alpha})$ fällt.

Von dieser Zerlegung der ebenen Beschleunigung macht man in der Kinematik des Punktes sehr häufig Gebrauch.

Jetzt wollen wir aber die ganze Ableitung für $\overline{w}$ noch einmal aufnehmen, indem wir die Vorstellung der relativen Bewegung zugrunde legen. Wir differentiieren also die Gleichung (4) vollständig nach der Zeit und erhalten

$$\frac{d\overline{v}}{d\tau} = \overline{\dot{\omega}\,x} + \overline{\omega\,v} + \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\mathfrak{d}\overline{x}}{\mathfrak{d}\tau}\right).$$

Hierin setze man für $\overline{v}$ seinen Wert ein und beachte, daß

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\mathfrak{d}\overline{x}}{\mathfrak{d}\tau}\right) = \overline{\omega\frac{\mathfrak{d}x}{\mathfrak{d}\tau}} + \frac{\mathfrak{d}^2\overline{x}}{\mathfrak{d}\tau^2}$$

ist; denn die vollständige Änderung eines jeden Vektors setzt sich zusammen aus der durch die Führung hervorgerufenen Änderung und der relativen Änderung.

Wir erhalten jetzt $\overline{w}$ in der dreigliedrigen Form:

$$\overline{w} = [\overline{\dot{\omega}\,x} + \overline{\omega(\omega\,x)}] + \frac{\mathfrak{d}^2\overline{x}}{\mathfrak{d}\tau^2} + 2\,\overline{\omega\cdot\frac{\mathfrak{d}x}{\mathfrak{d}\tau}}, \tag{7}$$

wenn wir die beiden ersten Glieder, wie angedeutet, in eins zusammenfassen.

Zur Abkürzung und bequemeren Ausdrucksweise setzen wir noch

$$\left\{\begin{aligned} \overline{\dot{\omega}x} + \overline{\omega(\omega\,x)} &= \overline{w}_f, \\ \frac{\mathfrak{d}^2\overline{x}}{\mathfrak{d}\tau^2} &= \overline{w}_r, \\ 2\,\overline{\omega\cdot\frac{\mathfrak{d}x}{\mathfrak{d}\tau}} &= \overline{w}_c, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

so daß

$$\overline{w} = \overline{w}_f + \overline{w}_r + \overline{w}_c$$

wird. Nach Nr. 35, Gleichung (6) erkennt man aber sofort, daß $\overline{w}_f$ diejenige Beschleunigung ist, welche der Punkt besitzen würde, wenn er im Augenblick mit der führenden Röhre (Fig. 34) fest verbunden wäre. $\overline{w}_f$ ist also der Vektor der Führungsbeschleunigung. Daß $\overline{w}_r$ der Vektor der Relativbeschleunigung ist, bedarf keiner weiteren Erklärung. Anders steht es mit dem Vektor $\overline{w}_c$, den wir daher näher ins Auge fassen müssen.

Nach der Definition des Momentproduktes steht $\bar{w}_c$ senkrecht auf dem Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$ der Röhre und senkrecht auf dem Vektor der Relativgeschwindigkeit, welche selbst in die Richtung der Röhre fällt. Sie steht also senkrecht auf dem Radiusvektor (Fig. 34)*), während $\bar{w}_f$, solange nicht $\frac{d^2\vartheta}{d\tau^2}$ verschwindet, auf demselben schräg steht. Die Größe von $\bar{w}_c$ ist sowohl durch die Drehbewegung der Röhre ($\bar{\omega}$) als auch die Bewegung des Punktes in der Röhre $\left(\frac{\mathfrak{d}\bar{x}}{\mathfrak{d}\tau}\right)$ beeinflußt.

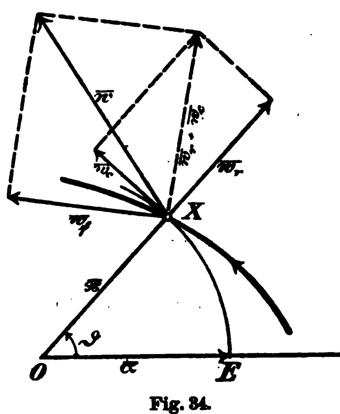


Fig. 34.

Diese doppelseitige Abstammung hat ihr den monströsen Namen „zusammengesetzte Zentripetalbeschleunigung“ eingebracht. Neuerdings wird sie häufiger Coriolis-Beschleunigung genannt, aber nicht mit Recht, da sie bereits von Clairaut eingeführt ist. Die Einführung einer kurzen und treffenden Bezeichnung überlassen wir der Zukunft.

Da bei der ebenen Bewegung, welche hier allein betrachtet wurde, $\bar{\omega}$ immer senkrecht auf der Relativgeschwindigkeit steht, so ist

$$w_c = 2\frac{d\vartheta}{d\tau}\frac{dr}{d\tau}, \tag{9}$$

während

$$w_r = \frac{d^2 r}{d\tau^2}$$

und

$$w_f = r\sqrt{\left(\frac{d^2\vartheta}{d\tau^2}\right)^2 + \left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)^4}$$

wird.

Jetzt sind alle Komponenten der Beschleunigung nach der Methode der relativen Bewegung interpretiert und wir

*) In Fig. 34 und 35 muß die konkave Seite der Bahnkurve nicht dem Punkt O zugewendet, sondern nach außen gekehrt sein.

können das Resultat dieser Betrachtung in dem folgenden Satze zusammenfassen:

Bei der Darstellung der ebenen Bewegung eines Punktes durch Polarkoordinaten kann man die absolute Geschwindigkeit als Resultante der Führungsgeschwindigkeit und der relativen Geschwindigkeit auffassen. Die absolute Beschleunigung zerfällt dieser Anschauung entsprechend in drei Komponenten: die Führungsbeschleunigung, die Relativbeschleunigung und die Coriolis-Beschleunigung. Die letztere steht auf dem Radiusvektor senkrecht und ist dem doppelten Produkte aus der Winkelgeschwindigkeit und der Relativgeschwindigkeit gleich.

Zum Schlusse wollen wir die Gleichungen (8) noch etwas weiter ausführen. Es wird

$$\overline{w}_f = \frac{d^2\vartheta}{d\tau^2}\cdot\overline{\eta x} - \left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)^2\cdot\overline{x}$$

$$\overline{w}_r = \frac{d^2 r}{d\tau^2}\cdot\frac{\overline{x}}{r}$$

$$\overline{w}_c = \frac{2}{r}\,\frac{d\vartheta}{d\tau}\,\frac{dr}{d\tau}\cdot\overline{\eta x}\,.$$

Hieraus erhält man durch Addition

$$\overline{w} = \overline{x}\left[\frac{1}{r}\,\frac{d^2 r}{d\tau^2} - \left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)^2\right] + \overline{\eta x}\left[\frac{d^2\vartheta}{d\tau^2} + 2\,\frac{d\vartheta}{d\tau}\,\frac{dr}{d\tau}\right],$$

also genau die Gleichung (4a).

47. Einführung der Begleitvektoren. Für die nun folgende Darstellung der Lagrangeschen Auffassung der Geschwindigkeits- und Beschleunigungskomponenten ist es zweckmäßig, homogene Koordinaten zu benützen. Wir schreiben deshalb jetzt $\overline{v}$ in der Form

$$\overline{v} = \frac{\overline{x}}{\varrho}\,\frac{d\varrho}{d\tau} + \overline{\eta x}\cdot\frac{d\vartheta}{d\tau} \tag{1}$$

und setzen*)

$$\frac{\overline{x}}{\varrho} = \overline{r}\,,\quad \overline{\eta x} = \overline{t}\,.$$

*) r bezeichnet hier nicht mehr den Radiusvektor.

Diese Strecken*) bestimmen ein mit dem Punkte X (Fig. 35)**) fortschreitendes Achsenkreuz, auf welches die Vektoren $\bar{v}$ und $\bar{w}$ bezogen werden können. Sie begleiten also den Punkt während seiner Bewegung in die Ebene als rein geometrische Gebilde. Aus diesem Grunde sollen sie die Begleitvektoren des Punktes genannt werden.

Multipliziert man also jeden Begleitvektor mit der entsprechenden Parametergeschwindigkeit, so ist die geometrische Summe dieser Größen die absolute Geschwindigkeit $\bar{v}$.

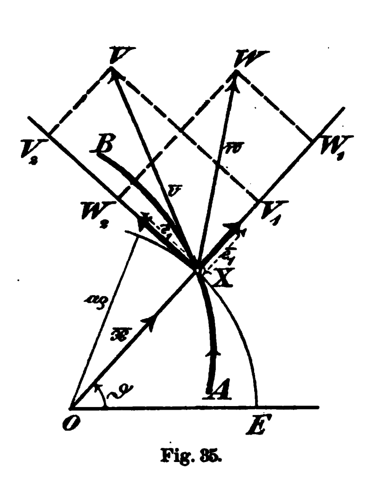


Fig. 35.

Lagrange projiziert zunächst $\bar{v}$ auf die Richtungen der Begleitvektoren, betrachtet aber nicht die Projektionen im engeren Sinne, nämlich

$$v \cos(\bar{v}/\bar{r}) \quad \text{und} \quad v \cos \bar{v}/\bar{t}) ,$$

sondern die verallgemeinerten Projektionen, welche unmittelbar durch die Arbeitsprodukte $\bar{r}\bar{v}$ und $\bar{t}\bar{v}$ dargestellt sind.

Diese Größen folgen sofort aus

$$(2) \qquad \bar{v} = \bar{r} \cdot \dot{\varrho} + \bar{t} \cdot \dot{\vartheta} .$$

Nämlich

$$\bar{r}\bar{v} = r^2 \cdot \dot{\varrho} \quad \text{und} \quad \bar{t}\bar{v} = t^2 \cdot \dot{\vartheta} ,$$

da die Begleitvektoren hier***) aufeinander senkrecht stehen.

Für den ganzen Aufbau der Kinematik, wie wir ihn Lagrange verdanken, ist es nun von fundamentaler Bedeutung, daß die Ausdrücke $\bar{r}\dot{\varrho}$ und $\bar{t}\dot{\vartheta}$ in der vektoriellen Gleichung (2) durch die Größe:

$$(3) \qquad E = \tfrac{1}{2} v^2 = \tfrac{1}{2} (r^2 \cdot \dot{\varrho}^2 + t^2 \cdot \dot{\vartheta}^2)$$

und ihre partiellen Derivierten

$$R = \frac{\partial E}{\partial \dot{\varrho}}, \quad T = \frac{\partial E}{\partial \dot{\vartheta}}$$

*) In der Fig. 35 ist $\bar{e}_1 = \bar{r}$ und $\bar{e}_2 = \bar{t}$ zu setzen.

**) Vgl. die Anmerkung auf S. 66.

***) In allgemeinen Fällen trifft dies keineswegs zu.

vollständig gegeben sind. D. h. kennt man die Größen E, R, T, dann kennt man auch $\bar{v}$ vollständig. So naheliegend uns jetzt diese Auffassung erscheinen mag, so ist doch die Tatsache zu beachten, daß vor Lagrange niemand die prinzipielle Bedeutung derselben erkannt hat. Leibniz (1646—1716) hatte allerdings lange vorher eingesehen, daß die Größe $2E$, welche er*) die „lebendige Kraft" des bewegten Punktes nannte, in der ganzen Mechanik einen der wichtigsten Grundbegriffe ausdrückt, aber die vollständig durchgeführte Erkenntnis, daß E und seine Übertragung auf Systeme den zentralen Kernpunkt**) der ganzen Kinematik bildet, ist durchaus das Verdienst von Lagrange.

Aus Gleichung (3) ergibt sich unmittelbar, daß

$$(4)\qquad \bar{r}\,\bar{v} = \frac{\partial E}{\partial \dot{\varrho}} \quad \text{und} \quad \bar{t}\,\bar{v} = \frac{\partial E}{\partial \dot{\vartheta}}$$

ist. Diese Größen nennen wir die Begleitmomente der Geschwindigkeit, indem wir hier das Wort Moment im allgemeinen Sinne für eine Größe gebrauchen, die sich aus zwei Faktoren zusammensetzt. Dieser Sprachgebrauch ist seit Galilei in der Mechanik üblich.

E wird jetzt allgemein als „kinetische Energie" des bewegten Punktes bezeichnet.

Hiernach läßt sich für unsere ebene Bewegung in Polarkoordinaten der folgende Satz aussprechen:

Die Begleitmomente des Vektors der Geschwindigkeit sind den entsprechenden Derivierten der kinetischen Energie des Punktes nach den Parametergeschwindigkeiten gleich.

48. Die Begleitmomente der Beschleunigung für ebene Polarkoordinaten. Wir differentiieren jetzt die Gleichungen

$$\bar{r}\,\bar{v} = R \quad \text{und} \quad \bar{t}\,\bar{v} = T$$

nach der Zeit und bringen das Resultat in die Form:

$$(1)\qquad \bar{r}\,\bar{w} = \frac{dR}{d\tau} - \frac{d\bar{r}}{d\tau}\bar{v}, \quad \bar{t}\,\bar{w} = \frac{dT}{d\tau} - \frac{d\bar{t}}{d\tau}\bar{v}\,.$$

---

*) Leibniz betrachtet eigentlich die Größe $2E = \mu v^2$, wo μ die Masse des Punktes bedeutet. Hier ist also $\mu = 1$ zu setzen, was in der Kinematik eines einzelnen Punktes immer erlaubt ist.

**) Diese Behauptung ist selbstverständlich hier nur als eine allgemein orientierende zu betrachten. Der Nachweis ihrer Berechtigung ist eben Aufgabe des methodischen Lehrganges der Kinematik.

Die Begleitmomente der Beschleunigung sind also hiermit bereits gewonnen, aber es sind gleichzeitig die neuen Größen

$$\frac{d\bar{r}}{d\tau} \quad \text{und} \quad \frac{d\bar{t}}{d\tau}$$

eingetreten, welche näher betrachtet werden müssen. Es ist natürlich:

$$\frac{d\bar{r}}{d\tau} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \varrho} \cdot \dot{\varrho} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial \vartheta} \cdot \dot{\vartheta} \quad \text{und} \quad \frac{d\bar{t}}{d\tau} = \frac{\partial \bar{t}}{\partial \varrho} \cdot \dot{\varrho} + \frac{\partial \bar{t}}{\partial \vartheta} \cdot \dot{\vartheta}.$$

Die Definitionen der Begleitvektoren wollen wir jetzt in der folgenden Weise schreiben:

$$\bar{r} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial \varrho}, \quad \bar{t} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial \vartheta}.$$

Hieraus ergibt sich sofort die identische Gleichung:

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \bar{t}}{\partial \varrho}.$$

Mithin wird:

$$\frac{d\bar{r}}{d\tau} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \varrho} \cdot \dot{\varrho} + \frac{\partial \bar{t}}{\partial \varrho} \cdot \dot{\vartheta} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \varrho}$$

und

$$\frac{d\bar{t}}{d\tau} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \vartheta} \cdot \dot{\varrho} + \frac{\partial \bar{t}}{\partial \vartheta} \cdot \dot{\vartheta} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \vartheta}.$$

Die Gleichungen (1) nehmen also die Form an:

$$\bar{r}\,\bar{w} = \frac{dR}{d\tau} - \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \varrho},$$

$$\bar{t}\,\bar{w} = \frac{dT}{d\tau} - \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \vartheta}$$

oder:

$$(2) \quad \begin{cases} \bar{r}\,\bar{w} = \dfrac{d}{d\tau}\left(\dfrac{\partial E}{\partial \dot{\varrho}}\right) - \dfrac{\partial E}{\partial \varrho}, \\[2ex] \bar{t}\,\bar{w} = \dfrac{d}{d\tau}\left(\dfrac{\partial E}{\partial \dot{\vartheta}}\right) - \dfrac{\partial E}{\partial \vartheta}. \end{cases}$$

Dies sind die Lagrangeschen Gleichungen für die Begleitmomente der Beschleunigung in dem besonderen Falle ebener Polarkoordinaten.

Das Begleitmoment der Beschleunigung für jede Koordinate ist gleich der vollständigen Zeitderivierten des zugehörigen Begleitmomentes der Geschwindigkeit vermindert um die partielle Derivierte der kinetischen Energie nach der zugehörigen Koordinate.

Aufgabe 36. Man führe die Berechnung von $\bar{r}\bar{w}$ und $\bar{t}\bar{w}$ nach Anleitung der Gleichung (2) durch und zeige, daß nach den Gleichungen (5) und (6) von Nr. 46 die Beziehungen $\bar{r}\bar{w} = a\,w_r$ und $\bar{t}\bar{w} = r\,w_\vartheta$ bestehen.

49. Der Vektor der ganzen Beschleunigung. Bei der ebenen Bewegung muß auch $\bar{w}$ in der Bahnebene liegen. Folglich ist

$$\bar{w} = \alpha \cdot \bar{r} + \beta \cdot \bar{t}$$

und

$$\bar{r}\bar{w} = \alpha \cdot r^2\,, \quad \bar{t}\bar{w} = \beta \cdot t^2\,.$$

Man erhält also für den Zusammenhang der ganzen Beschleunigung mit den beiden Begleitmomenten der Beschleunigung die Gleichung

$$\bar{w} = \frac{\bar{r}\bar{w}}{r^2} \cdot \bar{r} + \frac{\bar{t}\bar{w}}{t^2} \cdot \bar{t}\,,$$

wobei zu beachten ist, daß $\bar{r}\bar{t} = 0$ vorausgesetzt wurde.

Bei der Bewegung eines Punktes auf einer gekrümmten Fläche, zu deren Untersuchung wir jetzt übergehen, besteht eine solche einfache Beziehung nicht mehr, da hier $\bar{w}$ im allgemeinen aus der Tangentialebene der Fläche heraustritt.

50. Koordinaten auf der Kugelfläche. In Fig. 35a sei X ein beliebiger Punkt auf der Kugelfläche mit dem Radius a um den festen Bezugspunkt O. Seine Lage bestimmen wir in der üblichen Weise durch den Winkel β, um welchen $\bar{x}$ gegen die Äquatorebene OAB geneigt ist, und den Winkel λ, welchen die Horizontalprojektion OP mit $OA = \bar{a}$ einschließt. Dann ist β die Breite und λ die Länge des Punktes X.

Ferner wird

$$\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3\,,$$

worin

$$\bar{x}_1 = \cos\beta\cos\lambda \cdot \bar{a}\,, \quad \bar{x}_2 = \cos\beta\sin\lambda \cdot \overline{\eta a}\,, \quad \bar{x}_3 = a\sin\beta \cdot \bar{\eta}$$

zu setzen ist. $\bar{\eta}$ ist ein Einheitsvektor in der Polachse der Kugel. Die Parametergleichung der Kugelfläche heißt also:

$$(1) \qquad \bar{x} = \cos\beta\cos\lambda \cdot \bar{a} + \cos\beta\sin\lambda \cdot \overline{\eta\,a} + a\sin\beta \cdot \bar{\eta}\,.$$

Sie bildet die geometrische Grundlage der nun folgenden kinematischen Ausführungen.

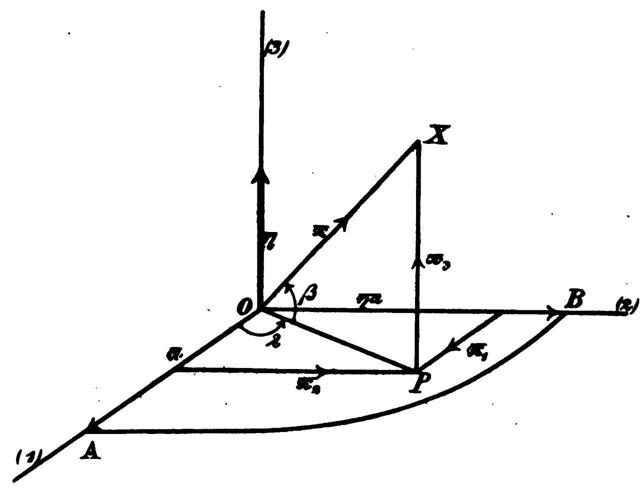


Fig. 85 a.

51. Geschwindigkeit auf der Kugel. Da hier, wie bei der ebenen Bewegung, nur zwei Parameter β und λ auftreten, so können wir die Geschwindigkeit wieder in der Form

$$\bar{v} = \bar{b} \cdot \dot{\beta} + \bar{l} \cdot \dot{\lambda} \tag{1}$$

schreiben, so daß $\bar{b}$ und $\bar{l}$ die beiden Begleitvektoren darstellen. Die Ausführung der Differenzierung von $\bar{x}$ gibt

$$\bar{v} = [-\sin\beta\,(\cos\lambda \cdot \bar{a} + \sin\lambda \cdot \overline{\eta\,\bar{a}}) + a\cos\beta \cdot \bar{\eta}] \cdot \dot{\beta}$$
$$- \cos\beta\,(\sin\lambda \cdot \bar{a} - \cos\lambda \cdot \overline{\eta\,\bar{a}})\,\dot{\lambda}\,.$$

Es wird also

$$\left\{\begin{aligned} \bar{b} &= -\sin\beta\,(\cos\lambda \cdot \bar{a} + \sin\lambda \cdot \overline{\eta\,\bar{a}}) + a\cos\beta \cdot \bar{\eta}\,, \\ \bar{l} &= -\cos\beta\,(\sin\lambda \cdot \bar{a} - \cos\lambda \cdot \overline{\eta\,\bar{a}})\,. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

$\bar{b}$ liegt in der Meridianebene des Punktes X und steht senkrecht auf $\bar{x}$. $\bar{l}$ liegt in der Ebene des Parallelkreises zum Äquator. Man findet ferner

$$\bar{b}\,\bar{l} = \sin\beta\cos\beta\,(\sin\lambda\cos\lambda \cdot a^2 - \sin\lambda\cos\lambda \cdot a^2) = 0\,.$$

Die beiden Begleitvektoren stehen demnach aufeinander senkrecht. Um ihre absoluten Längen zu finden, bilde man

$$b^2 = a^2 \sin^2\beta + a^2 \cos^2\beta = a^2$$

und

$$l^2 = a^2 \cos^2\beta\,.$$

Hiernach wird

$$b = a \quad \text{und} \quad l = a\cos\beta\,.$$

Da nun nach Gleichung (1)

$$E = \tfrac{1}{2}(b^2\dot\beta^2 + l^2\dot\lambda^2)$$

ist, so kann man den einfachen Ausdruck für die kinetische Energie:

$$E = \tfrac{1}{2}a^2(\dot\beta^2 + \cos^2\beta\cdot\dot\lambda^2) \tag{3}$$

den weiteren Rechnungen zugrunde legen.

Aus Gleichung (1) folgt

$$\left\{\begin{aligned} \bar b\bar v &= B = b^2\cdot\dot\beta = a^2\dot\beta = \frac{\partial E}{\partial\dot\beta}\,, \\ \bar l\bar v &= L = l^2\dot\lambda = a^2\cos^2\beta\cdot\dot\lambda = \frac{\partial E}{\partial\dot\lambda} \end{aligned}\right. \tag{4}$$

als die Werte der den Koordinaten β und λ entsprechenden Begleitmomente der Geschwindigkeit.

Die Projektionen der Geschwindigkeit auf die beiden Begleitvektoren sind also

$$v\cos(\bar v/\bar b) = a\frac{d\beta}{d\tau}\,, \quad v\cos(\bar v/\bar l) = a\cos\beta\cdot\frac{d\lambda}{d\tau}\,.$$

Man mache sich dieses Resultat durch reingeometrische Überlegung klar!

52. Die Loxodrome auf der Kugelfläche. Hier bietet sich die Gelegenheit als Beispiel eine bestimmte Bahn auf der Kugelfläche vorzuführen. Es handelt sich um das Segeln eines Schiffes auf hoher See. Bestimmend für den Kurs sind Kompaß und Log. Der Kompaß mit Berücksichtigung der Mißweisung (Deklination) der Magnetnadel gestattet die Feststellung des Azimutes, d. h. des Winkels, welchen $\bar v$ mit $\bar b$ einschließt. Man segelt nach der Loxodrome, wenn man dieses Azimut während des Kurses konstant hält. Der

Ansatz unserer Aufgabe ist also

$$\frac{v\cos(\bar{v}/\bar{l})}{v\cos(\bar{v}/\bar{b})} = \operatorname{tg}\alpha\,,$$

wenn α das feste Azimut bedeutet.

Die Differentialgleichung der loxodromischen Bahn ist daher:

$$\frac{d\beta}{\cos\beta} = d\lambda\cdot\operatorname{ctg}\alpha\,.$$

Um diese zu integrieren, schreiben wir

$$\frac{d\beta}{\cos\beta} = \frac{d\beta}{\sin\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{d\beta}{2\sin\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{d\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\,.$$

Folglich ist

$$\frac{d\beta}{\cos\beta} = d\left[\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

wo das Symbol ln für den natürlichen Logarithmus des Argumentes steht. Nach diesen Vorbereitungen wird

$$\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \lambda\operatorname{ctg}\alpha + \gamma\,.$$

Um die Integrationskonstante γ festzulegen, nehmen wir an, die gesuchte Kurve gehe von dem Punkte $\beta=\beta_0$, $\lambda=\lambda_0$ der Kugelfläche aus. Unter dieser Voraussetzung ist

$$\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\beta_0}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \lambda_0\operatorname{ctg}\alpha + \gamma\,.$$

Die Gleichung der gesuchten Kurve ist also in definierter Form:

$$\ln\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\beta_0}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = (\lambda-\lambda_0)\operatorname{ctg}\alpha\,,$$

oder auch

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\beta_0}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{(\lambda-\lambda_0)\operatorname{ctg}\alpha},$$

wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet. Gibt man Anfangs- und Endpunkt $(\beta_1 \lambda_1)$ der Loxodrome, so ist zunächst das Azimut α aus der Gleichung

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)}\ln\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\beta_1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\beta_0}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

zu berechnen.

Aufgabe 37. Man verbinde den Punkt $\lambda_0=0$, $\beta_0=36{,}4^0$ mit dem Punkte $\lambda_1=108{,}5^0$, $\beta_1=42{,}3^0$ auf der Erdkugel sowohl durch eine Loxodrome als auch durch einen größten Kugelkreis. Welches ist die Wegdifferenz (in km) beider Kurse?

53. Begleitmomente der Beschleunigung auf der Kugelfläche. Hier gelten die Überlegungen und Schlüsse von Nr. 48 ganz unverändert. Man erhält also die beiden Begleitmomente der Beschleunigung $\bar{w}$ in der Form:

$$Q_\beta=\bar{b}\bar{w}=\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial E}{\partial\dot{\beta}}\right)-\frac{\partial E}{\partial\beta},$$

$$Q_\lambda=\bar{l}\bar{w}=\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial E}{\partial\dot{\lambda}}\right)-\frac{\partial E}{\partial\lambda},$$

wo

$$E=\tfrac{1}{2}a^2(\dot{\beta}^2+\cos^2\beta\cdot\dot{\lambda}^2)$$

zu nehmen ist.

Die Ausführung der angedeuteten Operationen gibt nun der Reihe nach:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial E}{\partial\dot{\beta}}\right)=a^2\frac{d^2\beta}{d\tau^2},\quad \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial E}{\partial\dot{\lambda}}\right)=a^2\frac{d}{d\tau}\left(\cos^2\beta\cdot\frac{d\lambda}{d\tau}\right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial\beta}=-a^2\cos\beta\sin\beta\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^2,\quad \frac{\partial E}{\partial\lambda}=0.$$

Hiernach wird

$$Q_\beta=a^2\left[\frac{d^2\beta}{d\tau^2}+\sin\beta\cos\beta\cdot\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^2\right],$$

$$Q_\lambda=a^2\left[\cos^2\beta\frac{d^2\lambda}{d\tau^2}-2\sin\beta\cos\beta\cdot\frac{d\beta}{d\tau}\cdot\frac{d\lambda}{d\tau}\right].$$

Bewegt sich ein Kugelpendel (Fig. 36) bei dem Ausschlagwinkel ϑ so, daß der Punkt X einen kleinen Kugelkreis gleichförmig durchläuft, dann ist

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \vartheta\,, \quad \frac{d\beta}{d\tau} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\lambda}{d\tau} = \omega\,,$$

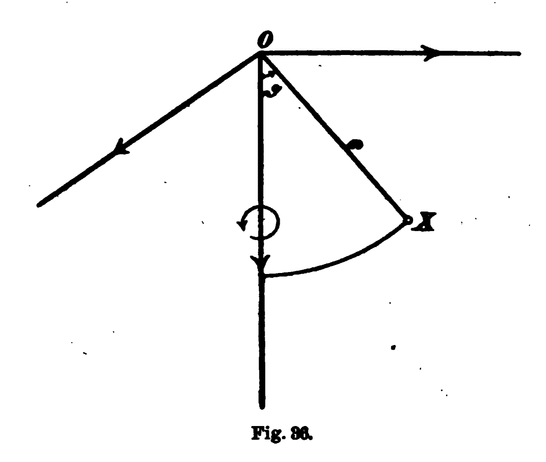


Fig. 36.

wo ω die konstante Winkelgeschwindigkeit des Umlaufes um die Vertikalachse bedeutet. In diesem besonderen Falle wird also

$$Q_\beta = \frac{a^2}{2}\sin 2\vartheta \cdot \omega^2 \quad \text{und} \quad Q_\lambda = 0\,.$$

54. Die ganze Beschleunigung bei der Kugelbewegung. Wenn man die beiden Begleitmomente Q_β und Q_λ in dem bisher behandelten Falle kennt, so ist damit noch keineswegs der Vektor $(\overline{w})$ der Beschleunigung bestimmt, sondern nur diejenige Komponente der ganzen Beschleunigung, welche in die Berührungsebene der Kugel im Punkte X fällt. Bezeichnen wir diese Komponente mit $\overline{w}_t$ und setzen wir

$$\overline{w}_t = \alpha \cdot \overline{b} + \beta \cdot \overline{l}\,,$$

was jedenfalls erlaubt ist, da $\overline{b}$ und $\overline{l}$ in der Berührungsebene der Kugelfläche liegen, so können wir die Faktoren α und β leicht bestimmen. Denn die ganze Beschleunigung

ist darstellbar in der Form:

(1) $$\bar{w} = \bar{w}_t + \bar{w}_s,$$

wenn $\bar{w}_s$ in die Richtung der Flächennormale fällt, welche hier mit der Richtung von $\bar{x}$ zusammenfällt. Man kann also auch

$$\bar{w} = \alpha \cdot \bar{l} + \beta \cdot \bar{l} + \frac{w_s}{a} \cdot \bar{x}$$

setzen. Hieraus folgt aber sofort:

$$Q_\beta = \bar{b}\bar{w} = \alpha \cdot b^2$$

und

$$Q_\lambda = \bar{l}\bar{w} = \beta \cdot l^2.$$

Man erhält also für $\bar{w}_t$ den vollständig bestimmten Ausdruck:

(2) $$\bar{w}_t = \frac{Q_\beta}{b^2} \cdot \bar{b} + \frac{Q_\lambda}{l^2} \cdot \bar{l}.$$

Diese Komponente von $\bar{w}$ wollen wir die treibende Beschleunigung nennen. Sie allein kommt bei dem Bewegungsvorgang unmittelbar in Betracht, denn Q_β und Q_λ berechnen sich aus $\bar{w}_t$ allein*). Ihre Definition ist auch in dem folgenden Satze enthalten:

Trägt man auf den Begleitvektoren die entsprechenden Lagrangeschen Momente der Beschleunigung, dividiert durch die Länge ihres Begleitvektors, von dem Punkte X aus ab, so ist die Resultante (geometrische Summe) dieser Vektoren die treibende Beschleunigung.

Die zweite Komponente $\bar{w}_s$, welche auf der Kugelfläche senkrecht steht, nennen wir die spannende Beschleunigung. Sie ist in gewissem Sinne von den Begleitmomenten der Beschleunigung unabhängig. Um ihren Wert (Größe) zu bestimmen, differentiieren wir den Ausdruck

$$\bar{v} = \bar{b} \cdot \dot{\beta} + \bar{l} \cdot \dot{\lambda}$$

nach der Zeit und erhalten zunächst

$$\bar{w} = \bar{b}\ddot{\beta} + \bar{l}\ddot{\lambda} + \frac{d\bar{b}}{d\tau} \cdot \dot{\beta} + \frac{d\bar{l}}{d\tau} \cdot \dot{\lambda}.$$

Jetzt bilden wir

$$\bar{x}\bar{w} = \bar{x}\bar{w}_s = a\,w_s = \bar{x}\left(\frac{d\bar{b}}{d\tau} \cdot \dot{\beta} + \frac{d\bar{l}}{d\tau} \cdot \dot{\lambda}\right),$$

*) Die vollständige Begründung dieser Behauptung gehört in die Dynamik.

wodurch $\bar{w}_s$ bereits bestimmt ist. Der so erhaltene Ausdruck läßt sich aber wesentlich vereinfachen. Es ist nämlich

$$\frac{d\bar{b}}{d\tau} = \frac{\partial \bar{b}}{\partial \beta} \cdot \dot{\beta} + \frac{\partial \bar{b}}{\partial \lambda} \cdot \dot{\lambda}$$

und

$$\frac{d\bar{l}}{d\tau} = \frac{\partial \bar{l}}{\partial \beta} \cdot \dot{\beta} + \frac{\partial \bar{l}}{\partial \tau} \cdot \dot{\lambda} .$$

Nun wird aber:

$$\bar{x} \frac{\partial \bar{b}}{\partial \beta} = -a^2 , \quad \bar{x} \frac{\partial \bar{b}}{\partial \lambda} = 0 ,$$

$$\bar{x} \frac{\partial \bar{l}}{\partial \beta} = 0 , \quad \bar{x} \frac{\partial \bar{l}}{\partial \lambda} = -a^2 \cos^2 \beta .$$

Die Berücksichtigung dieser Werte ergibt:

$$a w_s = -a^2 \dot{\beta}^2 - a^2 \cos^2 \beta \cdot \dot{\lambda}^2 = -v^2 .$$

Folglich wird die spannende Beschleunigung

$$w_s = -\frac{v^2}{a} \tag{3}$$

und die ganze Beschleunigung

$$\bar{w} = \frac{Q_\beta}{b^2} \cdot \bar{b} + \frac{Q_\lambda}{l^2} \cdot \bar{l} - \frac{v^2}{a} \cdot \frac{\bar{x}}{a} . \tag{4}$$

Bei der Kugelbewegung ist die spannende Beschleunigung radial nach innen gerichtet und gleich der Normalbeschleunigung eines Punktes, welchen man sich mit der Geschwindigkeit v auf einem größten Kugelkreis fortschreitend vorstellt.

Aufgabe 38. Man beweise dieses Resultat direkt geometrisch, indem man einmal beachtet, daß w_s nur aus einer Komponente der Normalbeschleunigung $\frac{v^2}{r} \cdot \bar{\sigma}$ bestehen kann, indem man zweitens die Beziehung des Krümmungsradius r zu a beachtet.

55. Bewegung eines Punktes auf einer beliebigen Fläche. Wir haben die Bewegung auf der Kugelfläche so ausführlich dargestellt, weil sie als solche wichtige Anwendungen findet.

Daneben ist dieses Beispiel aber auch vorzüglich geeignet, dem Studierenden einen gründlichen Einblick in die charakteristischen Eigenschaften der allgemeineren Flächenbewegung zu geben. Da jetzt fast alle einzelnen Schritte für die Durchführung der allgemeinen Theorie vorgeführt sind, so können wir im folgenden eine knappe Darstellung wählen. Jede Fläche kann durch eine Parametergleichung von der Form

$$\bar{x} = \bar{f}(\vartheta_1, \vartheta_2)$$

dargestellt werden. Hieraus erhält man die Geschwindigkeit

(1) $$\bar{v} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial \vartheta_1} \cdot \dot{\vartheta}_1 + \frac{\partial \bar{x}}{\partial \vartheta_2} \dot{\vartheta}_2$$

oder durch Einführung der Begleitvektoren

(2) $$\bar{e}_1 = \frac{\partial \bar{x}}{\partial \vartheta_1}, \quad \bar{e}_2 = \frac{\partial \bar{x}}{\partial \vartheta_2}$$

(1a) $$\bar{v} = \bar{e}_1 \cdot \dot{\vartheta}_1 + \bar{e}_2 \cdot \dot{\vartheta}_2 .$$

Die Begleitmomente der Geschwindigkeit, welche ungerichtete Größen sind, bezeichnen wir im allgemeinen Falle mit P_1 und P_2. Es wird also

(3) $$\begin{cases} P_1 = \bar{e}_1 \bar{v} = \bar{e}_1 \bar{e}_1 \cdot \dot{\vartheta}_1 + \bar{e}_1 \bar{e}_2 \cdot \dot{\vartheta}_2 \\ P_2 = \bar{e}_2 \bar{v} = \bar{e}_2 \bar{e}_1 \cdot \dot{\vartheta}_1 + \bar{e}_2 \bar{e}_2 \cdot \dot{\vartheta}_2 . \end{cases}$$

Da die Begleitvektoren nicht immer aufeinander senkrecht stehen, so wird auch das Produkt $\bar{e}_1 \bar{e}_2$ im allgemeinen von Null verschieden sein.

Zur Abkürzung setze man noch

$$\bar{e}_1 \bar{e}_1 = E_{11}, \quad \bar{e}_1 \bar{e}_2 = E_{12} = E_{21}, \quad \bar{e}_2 \bar{e}_2 = E_{22},$$

so daß

(4) $$P_1 = E_{11} \cdot \dot{\vartheta}_1 + E_{12} \dot{\vartheta}_2, \quad P_2 = E_{21} \dot{\vartheta}_1 + E_{22} \dot{\vartheta}_2$$

wird.

Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich auch die Parametergeschwindigkeiten $\dot{\vartheta}_1$, $\dot{\vartheta}_2$ linear durch die Begleitmomente P_1, P_2 ausdrücken.

Die kinetische Energie für die Flächenbewegung ist nach den eingeführten Bezeichnungen

(5) $$E = \tfrac{1}{2} v^2 = \tfrac{1}{2} (E_{11} \dot{\vartheta}_1^2 + 2 E_{12} \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 + E_{22} \dot{\vartheta}_2^2)$$

und die wichtigen Beziehungen

$$(6) \qquad P_1 = \frac{\partial E}{\partial \dot{\vartheta}_1}, \quad P_2 = \frac{\partial E}{\partial \dot{\vartheta}_2},$$

welche wir in den speziellen Beispielen entwickelt haben, bleiben auch im allgemeinen unverändert bestehen.

56. Die Lagrangeschen Ausdrücke für die Beschleunigung. Aus den Gleichungen

$$\bar{e}_1 \bar{v} = P_1, \quad \bar{e}_2 \bar{v} = P_2$$

folgt genau wie früher

$$\bar{e}_1 \bar{w} = \frac{dP_1}{d\tau} - \frac{d\bar{e}_1}{d\tau}\bar{v}, \quad \bar{e}_2 \bar{w} = \frac{dP_2}{d\tau} - \frac{d\bar{e}_2}{d\tau}\bar{v}$$

und da auch hier

$$\frac{d\bar{e}_1}{d\tau} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \vartheta_1}, \quad \frac{d\bar{e}_2}{d\tau} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \vartheta_2}$$

ist, so werden die Begleitmomente der Beschleunigung auch im allgemeinen Falle durch die uns bekannten Lagrangeschen Ausdrücke:

$$Q_1 = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\vartheta}_1}\right) - \frac{\partial E}{\partial \vartheta_1},$$

$$Q_2 = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\vartheta}_2}\right) - \frac{\partial E}{\partial \vartheta_2}$$

dargestellt.

57. Leistung der Beschleunigung bei der Flächenbewegung. Die Größe

$$\bar{w} \cdot d\bar{x}$$

nennt man die Arbeit der Beschleunigung $\bar{w}$ bezogen auf den Weg $d\bar{x}$. Wenn die Bahn auf der Fläche gegeben ist und wenn außerdem $\bar{w}$ in jedem Punkte der Bahn bekannt ist, so kann man das Integral

$$\int \bar{w}\, d\bar{x}$$

ausführen und als Integralarbeit der Beschleunigung für die gewählte Bahnstrecke bezeichnen. Man kann das Integral auch in die Form

$$\int \bar{w}\bar{v} \cdot d\tau$$

bringen, so daß die Zeit als unabhängige Veränderliche eintritt. Die Größe

$$L = \overline{w}\,\overline{v}$$

nennt man die Leistung der Beschleunigung mit Rücksicht auf ihre Bedeutung in der Dynamik. Sie steht in einem sehr naheliegenden Zusammenhange mit der kinetischen Energie und mit den Begleitmomenten der Beschleunigung. Aus

$$E = \tfrac{1}{2}\overline{v}\,\overline{v}$$

folgt sofort durch Differenzieren nach der Zeit

$$\frac{dE}{d\tau} = \overline{v}\,\overline{w}\,. \tag{1}$$

Es ist also

$$L = \frac{dE}{d\tau}$$

oder in Worten:

Die auf die Zeiteinheit bezogene Änderung der kinetischen Energie ist gleich der Leistung der Beschleunigung.

Aufgabe 39. Auf einer Kugelfläche vom Radius 1 sei ein größter Kugelkreis gezogen, dessen Pol die Breite β_0 und die Länge λ_0 hat. Auf diesem bewegt sich ein Punkt X mit der Anfangsgeschwindigkeit c vom Äquator aus aufsteigend nach dem Gesetz $v = \gamma \cdot \tau + c$. Welches ist die Integralarbeit der Beschleunigung in der ersten Hälfte der Kugelkreisbahn?

Da im Falle der allgemeinen Flächenbewegung E von den Parametern ϑ_1, ϑ_2 und ihren Geschwindigkeiten $\dot{\vartheta}_1, \dot{\vartheta}_2$ abhängt, so wird

$$\frac{dE}{d\tau} = \frac{\partial E}{\partial \vartheta_1}\dot{\vartheta}_1 + \frac{\partial E}{\partial \vartheta_2}\dot{\vartheta}_2 + \frac{\partial E}{\partial \dot{\vartheta}_1}\ddot{\vartheta}_1 + \frac{\partial E}{\partial \dot{\vartheta}_2}\ddot{\vartheta}_2$$

$$= -Q_1\dot{\vartheta}_1 - Q_2\dot{\vartheta}_2 + \left[\frac{dP_1}{d\tau}\cdot\dot{\vartheta}_1 + \frac{dP_2}{d\tau}\dot{\vartheta}_2 + P_1\ddot{\vartheta}_1 + P_2\ddot{\vartheta}_2\right],$$

d. h.

$$\frac{dE}{d\tau} = -Q_1\dot{\vartheta}_1 - Q_2\dot{\vartheta}_2 + \frac{d}{d\tau}(P_1\dot{\vartheta}_1 + P_2\dot{\vartheta}_2)\,.$$

Nun ist aber nach dem Satze von den homogenen Funktionen:

$$2E = \frac{\partial E}{\partial \dot{\vartheta}_1}\dot{\vartheta}_1 + \frac{\partial E}{\partial \dot{\vartheta}_2}\dot{\vartheta}_2 = P_1\dot{\vartheta}_1 + P_2\dot{\vartheta}_2$$

und folglich:

$$L = \frac{dE}{d\tau} = Q_1\dot{\vartheta}_1 + Q_2\dot{\vartheta}_2\,. \tag{2}$$

Diese Gleichung stellt den Zusammenhang der Leistung mit den Begleitmomenten der Beschleunigung dar. Sie folgt ohne Rechnung aus der Gleichung (1). Denn darnach ist

$$\frac{dE}{d\tau} = \bar{v}\,\bar{w} = (\bar{e}_1\dot{\vartheta}_1 + \bar{e}_2\dot{\vartheta}_2)\,\bar{w} = \bar{e}_1\,\bar{w}\cdot\dot{\vartheta}_1 + \bar{e}_2\,\bar{w}\cdot\dot{\vartheta}_2\,.$$

Den Inhalt der Gleichung (2) kann man in dem Satze aussprechen:

Multipliziert man die beiden Begleitmomente der Beschleunigung mit den zugehörigen Parametergeschwindigkeiten, so ergibt die Summe der Produkte die Leistung der Beschleunigung.

Hiernach läßt sich die Integralarbeit der Beschleunigung auch in der Form

$$A_w = \int (Q_1\,d\vartheta_1 + Q\,d\vartheta_2) \tag{3}$$

schreiben, von der wir später Gebrauch machen.

58. Die spannende Beschleunigungskomponente auf einer krummen Fläche. Aus dem Ausdrucke für die Geschwindigkeit

$$\bar{v} = \bar{e}_1\cdot\dot{\vartheta}_1 + \bar{e}_2\cdot\dot{\vartheta}_2$$

erhält man unmittelbar die ganze Beschleunigung in der Form:

$$\bar{w} = \bar{e}_1\cdot\ddot{\vartheta}_1 + \bar{e}_2\,\ddot{\vartheta}_2 + \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial \vartheta_1}\cdot\dot{\vartheta}_1^2 + \left(\frac{\partial \bar{e}_1}{\partial \vartheta_2} + \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial \vartheta_1}\right)\dot{\vartheta}_1\dot{\vartheta}_2 + \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial \vartheta_2}\dot{\vartheta}_2^2. \tag{1}$$

Neben den Begleitvektoren $\bar{e}_1$ und $\bar{e}_2$ wollen wir jetzt noch einen dritten Vektor einführen, welcher auf diesem senkrecht steht, also in die Richtung der Flächennormale im Punkte X fällt. Als Einheitsvektor ist er ohne weiteres gegeben durch die Definition

$$\bar{\alpha} = \frac{\overline{e_1 e_2}}{\overline{e_1 e_2}}\,. \tag{2}$$

Setzt man nun

$$\overline{w} = \gamma_1 \bar{e}_1 + \gamma_2 \bar{e}_2 + w_s \cdot \overline{\alpha} ,$$

so wird

$$\bar{e}_1 \overline{w} = Q_1 = \gamma_1 E_{11} + \gamma_2 E_{12} ,$$

$$\bar{e}_2 \overline{w} = Q_2 = \gamma_1 E_{21} + \gamma_2 E_{22}$$

und

$$\overline{\alpha} \overline{w} = w_s .$$

Aus den beiden ersten Gleichungen ergibt sich

(3) $\gamma_1 = (E_{22} Q_1 - E_{12} Q_2) : \Delta$ und $\gamma_2 = (E_{11} Q_2 - E_{21} Q_1) : \Delta$,

wo zur Abkürzung

$$\Delta = E_{11} E_{22} - E_{12}^2$$

gesetzt ist. Zur Bestimmung der spannenden Beschleunigung w_s benutzen wir die Gleichung (1). Hieraus erhält man:

(4) $$\overline{e_1 e_2} \cdot w_s = \overline{e_1 e_2} \left[\frac{\partial \bar{e}_1}{\partial \vartheta_1} \dot{\vartheta}_1^2 + \left(\frac{\partial \bar{e}_1}{\partial \vartheta_2} + \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial \vartheta_1} \right) \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 + \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial \vartheta_2} \dot{\vartheta}_2^2 \right],$$

so daß jetzt $\overline{w}_s$ nach Größe und Richtung vollständig bekannt ist. Die treibende Beschleunigung $\overline{w}_t$ ist ebenfalls ermittelt, nämlich durch

(5) $$\Delta \cdot \overline{w}_t = (E_{11} \cdot \bar{e}_2 - E_{12} \cdot \bar{e}_1) \cdot Q_2 - (E_{21} \cdot \bar{e}_2 - E_{22} \cdot \bar{e}_1) Q_1 .$$

59. Geodätische Bahnen auf einer krummen Fläche. Unter allen Bewegungen eines Punktes auf einer gekrümmten Fläche ist diejenige besonders ausgezeichnet, für welche beide Begleitmomente der Beschleunigung verschwinden. In diesem besonderen Falle ist also

$$Q_1 = \bar{e}_1 \overline{w} = 0 \quad \text{und} \quad Q_2 = \bar{e}_2 \overline{w} = 0 .$$

Der Vektor der ganzen Beschleunigung steht nach dieser Voraussetzung auf der Tangentenebene der Fläche senkrecht und reduziert sich demnach auf die spannende Komponente $\overline{w}_s = w_s \cdot \overline{\alpha}$. Ferner wird

$$\frac{dE}{d\tau} = Q_1 \dot{\vartheta}_1 + Q_2 \dot{\vartheta}_2 = 0 ,$$

d. h.

$$E = E_0 .$$

Die kinetische Energie wird von der Zeit unabhängig, behält also ihren Anfangswert E_0 bei.

Daneben ist eine geometrische Eigenschaft der Bahnen bei dieser ausgezeichneten Bewegung bemerkenswert, welche wir etwas näher betrachten wollen. Aus dem Ausdruck für die Geschwindigkeit

$$\bar{v} = \bar{e}_1 \cdot \dot{\vartheta}_1 + \bar{e}_2 \cdot \dot{\vartheta}_2$$

folgt durch Momentbildung:

$$\begin{aligned}\overline{(e_1 e_2) v} &= \overline{(e_1 e_2) e_1} \cdot \dot{\vartheta}_1 + \overline{(e_1 e_2) e_2} \cdot \dot{\vartheta}_2 \\ &= [E_{11} \cdot \bar{e}_2 - E_{12} \cdot \bar{e}_1] \dot{\vartheta}_1 + [E_{21} \cdot \bar{e}_2 - E_{22} \bar{e}_1] \dot{\vartheta}_2 \\ &= (E_{11} \dot{\vartheta}_1 + E_{21} \dot{\vartheta}_2) \bar{e}_2 - (E_{12} \dot{\vartheta}_1 + E_{22} \dot{\vartheta}_2) \bar{e}_1 .\end{aligned}$$

Es wird also

$$\overline{(e_1 e_2) v} = P_1 \cdot \bar{e}_2 - P_2 \cdot \bar{e}_1 ,$$

und hieraus sofort

$$\overline{(e_1 e_2) v} \cdot \bar{w} = P_1 Q_2 - P_2 Q_1 .$$

Die Anwendung der Vertauschungsformel ergibt noch

$$\overline{e_1 e_2} \cdot \overline{v w} = P_1 Q_2 - P_2 Q_1 . \tag{1}$$

Nach Nr. 40, Gleichung (1) ist aber

$$\overline{v w} = \frac{v^3}{r} \cdot \bar{\eta} .$$

Mithin erhält man den Winkel zwischen der Flächennormale $\bar{\alpha}$ und der Binormale $\bar{\eta}$ der Bahn stets aus der Gleichung

$$\overline{e_1 e_2} \cdot \cos(\bar{\alpha}/\bar{\eta}) = \frac{r}{v^3}(P_1 Q_2 - P_2 Q_1) . \tag{2}$$

In unserem besonderen Falle ist nach der Voraussetzung

$$Q_1 = Q_2 = 0$$

und v konstant. Folglich wird

$$\cos(\bar{\alpha}/\bar{\eta}) = 0 .$$

Man nennt derartige Bahnen auf gegebenen Flächen **geodätische**, weil sie, was wir jedoch hier nicht nachweisen, im allgemeinen die kürzesten Verbindungslinien zwischen zwei bestimmten Punkten der Fläche sind. Wir begnügen uns mit dem eben abgeleiteten Satz:

Ist die Bewegung eines Punktes auf einer Fläche eine geodätische, so steht die Normale der Fläche auf der Binormalen der Bahn beständig senkrecht. Die ganze Beschleunigung äußert sich als spannende, während der Punkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit die geodätische Bahn durchläuft.

Die Gleichung der geodätischen Bahn kann entweder unmittelbar durch Integration der beiden Differentialgleichungen

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\vartheta}_1}\right) - \frac{\partial E}{\partial \vartheta_1} = 0\,,$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\vartheta}_2}\right) - \frac{\partial E}{\partial \vartheta_2} = 0$$

und nachfolgende Elimination der Zeit gewonnen werden oder einfacher durch Benützung der Integralgleichung

$$E = \tfrac{1}{2} c^2 = E_0\,,$$

wie wir im folgenden Beispiel zeigen.

60. Geodätische Bahn auf der Kegelfläche. Wir legen (Fig. 37) die Spitze des Kegels in den Bezugspunkt O und lassen seine Achse mit der Vertikalen $\bar{\eta}$ zusammenfallen. Die Öffnung des Kegels sei bestimmt durch den Winkel 2γ. Es wird dann $OX = \bar{x}$. Setzen wir nun in Nr. 50, Gleichung (1) den Kugelradius a veränderlich, also $a\varrho$ statt a, während $OA = \bar{a}$ fest bleibt und gleichzeitig $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \gamma$, dann erhält man

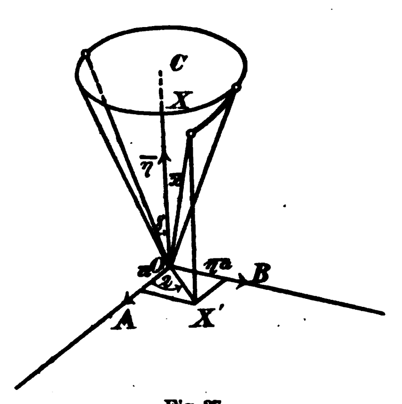


Fig. 37.

$$(1)\qquad \bar{x} = \varrho\left[\sin\gamma\,(\cos\lambda\cdot\bar{a} + \sin\lambda\cdot\overline{\eta\, a}) + a\cos\gamma\cdot\bar{\eta}\right].$$

Dies ist die Gleichung der Kegelfläche in der Parameterform. Alle Punkte derselben werden erreicht, indem man ϱ von 0 bis ∞ und λ von 0 bis 2π laufen läßt.

Für die Begleitvektoren erhält man aus $\bar{x}$ die Ausdrücke:

$$(2) \qquad \bar{e}_1 = \frac{\partial \bar{x}}{\partial \varrho} = \sin\gamma\,(\cos\lambda \cdot \bar{a} + \sin\lambda \cdot \overline{\eta\, a}) + a\cos\gamma \cdot \bar{\eta}\,,$$

$$(3) \qquad \bar{e}_2 = \frac{\partial \bar{x}}{\partial \lambda} = \varrho \sin\gamma\,(-\sin\lambda \cdot \bar{a} + \cos\lambda \cdot \overline{\eta\, a})$$

und hieraus

$$\bar{e}_1\,\bar{e}_2 = 0\,, \quad e_1 = a\,, \quad e_2 = a \sin\gamma \cdot \varrho\,.$$

Man erhält also für die kinetische Energie den einfachen Ausdruck

$$E = \tfrac{1}{2}\, a^2 (\dot{\varrho}^2 + \sin^2\gamma \cdot \varrho^2\, \dot{\lambda}^2)$$

und deshalb

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\varrho}} = a^2 \dot{\varrho}\,, \qquad \frac{\partial E}{\partial \dot{\lambda}} = a^2 \sin^2\gamma \cdot \varrho^2 \dot{\lambda}\,,$$

$$\frac{\partial E}{\partial \varrho} = a^2 \sin^2\gamma \cdot \varrho\, \dot{\lambda}^2\,, \qquad \frac{\partial E}{\partial \lambda} = 0\,.$$

Die beiden Gleichungen der geodätischen Bahn lauten also

$$a^2 \frac{d^2\varrho}{d\tau^2} - a^2 \sin^2\gamma\, \varrho \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^2 = 0\,,$$

$$a^2 \sin^2\gamma \frac{d}{d\tau}\left(\varrho^2 \frac{d\lambda}{d\tau}\right) = 0\,.$$

Aus der zweiten folgt sofort:

$$(4) \qquad \varrho^2 \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right) = \alpha\,,$$

wenn α die Integrationskonstante bezeichnet. Nun ist aber

$$(5) \qquad E = E_0 \quad \text{d. h.} \quad \left(\frac{d\varrho}{d\tau}\right)^2 + \sin^2\gamma\varrho^2 \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^2 = \omega^2\,,$$

wo ω ebenfalls konstant ist.

Die Elimination von $d\tau$ aus den Gleichungen (4) und (5) führt auf die geometrische Gleichung der geodätischen Bahn:

$$d\lambda = \frac{\alpha \cdot d\varrho}{\varrho \sqrt{\omega^2 \varrho^2 - \alpha^2 \sin^2\gamma}}\,.$$

Man schließt hieraus, daß

$$\varrho^2 \geqq \frac{\alpha^2}{\omega^2} \sin^2\gamma$$

sein muß, wodurch dem Verlauf der Kurve eine bestimmte Grenze gesetzt ist.

Da die weitere Ausführung keinerlei Schwierigkeiten macht, so überlassen wir die Integration und die Bestimmung der Konstanten dem Leser.

Anmerkung. Die vollständige Lösung der vorstehenden Aufgabe wird mathematisch durchsichtiger, wenn man beide Lagrangesche Gleichungen ohne Zuhilfenahme der Beziehung $E = E_0$ benützt und

$$a\varrho = r \quad \text{sowie} \quad \sin\gamma \cdot d\lambda = d\psi$$

setzt. Nach diesen Substitutionen wird

$$E = \tfrac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\psi}^2)\,. \tag{6}$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{r}} = \dot{r}\,, \quad \frac{\partial E}{\partial \dot{\psi}} = r^2\dot{\psi}\,, \quad \frac{\partial E}{\partial r} = r\cdot\dot{\psi}^2\,, \quad \frac{\partial E}{\partial \psi} = 0\,,$$

Die Gleichungen von Lagrange sind also:

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} - r^2\dot{\psi}^2 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{d\tau}(r^2\dot{\psi}) = 0\,. \tag{7}$$

Aus der letzten Gleichung folgt:

$$r^2\dot{\psi} = C\,, \tag{8}$$

wenn C eine Integrationskonstante bedeutet.

Wir setzen jetzt $\frac{1}{r} = \mathfrak{r}$ und erhalten nach Elimination des Zeitelementes $d\tau$ aus Gleichung (8) die erste Lagrangesche Gleichung in der Form

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{d\psi^2} + \mathfrak{r} = 0\,. \tag{9}$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{a}\cos\psi + \mathfrak{b}\sin\psi\,. \tag{10}$$

Aus der Substitution $\sin\gamma \cdot d\lambda = d\psi$ folgt $\psi = \sin\gamma \cdot \lambda$, da hier keine Integrationskonstante zu berücksichtigen ist.

Hiernach erhält die Gleichung der geodätischen Linie auf dem Kreiskegel die Form:

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{a}\cos(\sin\gamma\cdot\lambda) + \mathfrak{b}\sin(\sin\gamma\cdot\lambda)\,. \tag{11}$$

Wir bezeichnen nun den Anfangspunkt dieser Kurve mit dem Index 0, den Endpunkt mit dem Index 1. Dann wird:

$$\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{a}\cos(\sin\gamma\cdot\lambda_0) + \mathfrak{b}\sin(\sin\gamma\cdot\lambda_0)\,,$$
$$\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{a}\cos(\sin\gamma\cdot\lambda_1) + \mathfrak{b}\sin(\sin\gamma\cdot\lambda_1)\,.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man für die Integrationskonstanten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die Werte:

$$\sin[\sin\gamma(\lambda_1-\lambda_0)]\cdot\mathfrak{a} = \mathfrak{r}_0\sin(\sin\gamma\cdot\gamma_1) - \mathfrak{r}_1\sin(\sin\gamma\cdot\lambda_0)\,,$$
$$\sin[\sin\gamma(\lambda_1-\lambda_0)]\cdot\mathfrak{b} = \mathfrak{r}_1\cos(\sin\gamma\cdot\lambda_0) - \mathfrak{r}_0\cos(\sin\gamma\cdot\lambda_1)\,.$$

Folglich wird.

$$\sin[\sin\gamma(\lambda_1-\lambda_0)]\cdot\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0\sin[\sin\gamma\cdot(\lambda_1-\lambda)] + \mathfrak{r}_1\sin[\sin\gamma\cdot(\lambda_1-\lambda)]\,.$$

Ersetzt man jetzt nach Beendigung der Rechnung $\mathfrak{r}$ wieder durch ϱ, dann gewinnt man das Resultat in der Form:

$$\left\{\begin{aligned} \sin[\sin\gamma(\lambda_1-\lambda_0)\cdot\frac{1}{\varrho} = {} & \frac{1}{\varrho_0}\sin[\sin\gamma\cdot(\lambda_1-\lambda)] \\ & + \frac{1}{\varrho_1}\sin[\sin\gamma\cdot(\lambda-\lambda_0)]\,. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Hiermit ist die geodätische Kurve von einem beliebigen Punkte der Kegelfläche mit der Öffnung 2γ bis zu einem beliebigen Endpunkte vollständig bestimmt. Denn man hat nur diesen Wert von ϱ in den Ausdruck

$$\bar{x} = \varrho\,[\sin\gamma\,(\cos\lambda\cdot\bar{a} + \sin\lambda\cdot\overline{\eta\,a}) + a\cos\gamma\cdot\bar{\eta}]$$

einzusetzen, um den Vektor als Funktion des Parameters λ eindeutig zu bestimmen.

61. Virtuelle Arbeit der Beschleunigung. Wir müssen jetzt zu allgemeineren Betrachtungen übergehen, welche für die ganze Mechanik von grundlegender Bedeutung sind. Es handelt sich jetzt um die Einführung und Erläuterung des Begriffes der virtuellen Verschiebungen eines Punktes auf einer gegebenen Fläche.

Der Ausdruck

$$d\bar{x} = \bar{e}_1\,d\vartheta_1 + \bar{e}_2\,d\vartheta_2$$

stellt nur dann das Element einer Bahn dar, wenn $d\vartheta_1$ und $d\vartheta_2$ nicht unabhängig voneinander sind.

Wir wollen

$$d\vartheta_1 = f_1(\vartheta)\,d\vartheta$$
$$d\vartheta_2 = f_2(\vartheta)\,d\vartheta$$

setzen, indem wir einen neuen Parameter ϑ, für welchen in spezieller Auffassung auch die Zeit gesetzt werden kann, einführen. Unter dieser Voraussetzung wird

$$d\bar{x} = (f_1 \cdot \bar{e}_1 + f_2\,\bar{e}_2)\,d\vartheta$$

eine bestimmte Funktion von ϑ.

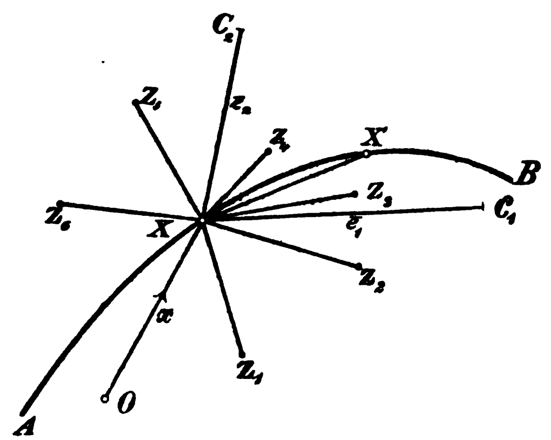


Fig. 38.

Ebenso ist jetzt die Arbeit der Beschleunigung auf einer gewissen Bahnstrecke

$$A = \int (Q_1\,d\vartheta_1 + Q_2\,d\vartheta_2)$$

oder

$$A = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} (f_1\,Q_1 + f_2\,Q_2)\,d\vartheta$$

durchaus bestimmt.

In Figur 38 sei die Kurve AB eine auf die angegebene Weise oder anderweitig festgelegte Bahn. Dann ist der unendlich kleine Vektor $XX' = d\bar{x}$ das Bahnelement in der Fortgangsrichtung des auf der Fläche beweglichen Punktes X.

In der Umgebung dieses Punktes denken wir uns beliebig viele weitere Punkte Z_1, Z_2 usw. so auf der Fläche herausgegriffen, daß ihre Abstände von X unendlich klein bleiben. Wir erreichen diese benachbarten Punkte tatsächlich, indem wir in dem Ausdruck

$$\bar{x} + \bar{e}_1 \,\delta\vartheta_1 + \bar{e}_2 \,\delta\vartheta_2$$

den beiden Größen $\delta\vartheta_1$, $\delta\vartheta_2$ alle möglichen, unendlich kleinen, sonst aber willkürlichen Werte beilegen.

In der Vorstellung denken wir uns den Punkt X nach einem beliebigen Nachbarpunkt verschoben und nennen die entsprechenden Wege — nach Größe und Richtung — die allgemeinen virtuellen Verschiebungen des Punktes X auf der Fläche.

Die Faktoren $\delta\vartheta_1$, $\delta\vartheta_2$ nennt man dieser Fiktion entsprechend die allgemeinen virtuellen Änderungen der Parameter ϑ_1 und ϑ_2. Natürlich sind die der eingeschlagenen Bahn entsprechenden Änderungen $d\vartheta_1$, $d\vartheta_2$ in der Mannigfaltigkeit der virtuellen Änderungen enthalten, gerade wie das Bahnelement $d\bar{x}$ ein Individuum der ganzen Schar der Größen

$$\bar{e}_1 \,\delta\vartheta_1 + \bar{e}_2 \,\delta\vartheta_2$$

ist und daraus hervorgeht, wenn $\delta\vartheta_1 = d\vartheta_1$ und $\delta\vartheta_2 = d\vartheta_2$ wird. Als Zeichen der allgemeinen (und auch der später noch zu spezialisierenden) virtuellen Verschiebungen des Punktes X wählen wir das seit Lagrange übliche Zeichen $\delta\bar{x}$. Es ist also

$$\delta\bar{x} = \bar{e}_1 \,\delta\vartheta_1 + \bar{e}_2 \,\delta\vartheta_2 \,.$$

Die ebenfalls nur in der Vorstellung existierende Größe

$$\bar{w}\,\delta\bar{x} = Q_1 \,\delta\vartheta_1 + Q_2 \,\delta\vartheta_2$$

heißt dem bisherigen Sprachgebrauch gemäß die virtuelle Arbeit der Beschleunigung. Für sie gilt der Satz:

> *Man erhält die virtuelle Arbeit der Beschleunigung eines auf einer Fläche beweglichen Punktes, indem man jedes Begleitmoment mit der virtuellen Änderung des betreffenden Parameters multipliziert und diese Produkte addiert.*

Ganz im Rahmen dieser Vorstellungen bleibend, bezeichnet man die Größe

$$\bar{v}\,\delta\bar{x} = P_1 \cdot \delta\vartheta_1 + P_2 \cdot \delta\vartheta_2$$

als die virtuelle Arbeit der Geschwindigkeit.

Wesentlich für den Nutzen der eingeführten virtuellen Arbeitsgrößen ist das Verschwinden derselben. Setzen wir nämlich

$$\bar{w}\,\delta\bar{x} = Q_1\,\delta\vartheta_1 + Q_2\,\delta\vartheta_2 = 0\,,$$

so folgt daraus wegen der Willkür in der Größenwahl der virtuellen Parameteränderungen $\delta\vartheta_1$, $\delta\vartheta_2$:

$$Q_1 = 0 \quad \text{und} \quad Q_2 = 0\,,$$

oder in Worten:

Die virtuelle Arbeit der Beschleunigung eines auf einer Fläche beweglichen Punktes verschwindet nur dann für alle virtuellen Verrückungen desselben, wenn die beiden Begleitmomente der Beschleunigung einzeln gleich Null werden.

62. Die Zentralgleichung für die Flächenbewegung. Lagrange hat eine Umformung des Ausdruckes für die virtuelle Arbeit der Beschleunigung in seiner Mécanique analytique (1788) benutzt, welche durch Ausdehnung auf allgemeine Bewegungen und beliebige Systeme zu einer Gleichung führt, die alle Gleichungen, welche sich auf die treibende Beschleunigung beziehen, als Sonderfälle enthält.

Wir gehen von der virtuellen Arbeit der Geschwindigkeit aus und differentiieren dieselbe vollständig nach der Zeit, indem wir beachten, daß auch die virtuelle Verrückung $\delta\bar{x}$ mit der Zeit veränderlich sein kann. Bei Betrachtung der virtuellen Verschiebungen wollen wir die Zeit nicht ändern, d. h. wir denken uns die Verschiebungen zeitlos entstanden, was den analytischen Festsetzungen $\delta\tau = 0$ und $\delta\,d\tau = 0$ entspricht. Ferner ist zu beachten, daß durch die Definition der virtuellen Verschiebungen $\delta\bar{x}$ noch nichts über die virtuelle Änderung der Geschwindigkeit $\dfrac{d\bar{x}}{d\tau}$ festgesetzt ist. Wir wollen uns aber auch diese irgendwie gestört denken, indem wir statt $\dfrac{d\bar{x}}{d\tau}$

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} + \delta\,\frac{d\bar{x}}{d\tau}\,,$$

oder da $\delta\,d\tau = 0$ ist,

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} + \frac{\delta\,d\bar{x}}{d\tau}$$

setzen, wobei wir uns jedoch noch nähere Festsetzungen über die Größe $\delta d\bar{x}$ vorbehalten. Doch sollen jetzt schon für den δ-Prozeß — seiner ursprünglichen Auffassung entsprechend — die Grundregeln der gewöhnlichen Differentiation festgehalten werden. Diese Festsetzung bedeutet in unserem Falle offenbar, daß auch $\delta d\bar{x}$ nicht aus der Fläche heraustritt, auf welche die Bewegung des Punktes von vornherein beschränkt ist. Nun ist

$$\frac{d}{d\tau}(\bar{v}\cdot\delta\bar{x}) = \bar{w}\cdot\delta\bar{x} + \bar{v}\cdot\frac{d}{d\tau}(\delta\bar{x})$$

oder

$$\bar{w}\cdot\delta\bar{x} = \frac{d}{d\tau}(\bar{v}\cdot\delta\bar{x}) - \bar{v}\frac{d\,\delta\bar{x}}{d\tau}. \tag{1}$$

Die Gleichung (1) läßt sich jetzt in die Form bringen:

$$\bar{w}\,\delta\bar{x} = \frac{d}{d\tau}(\bar{v}\,\delta\bar{x}) - \bar{v}\,\delta\left(\frac{d\bar{x}}{d\tau}\right) - \bar{v}\left(\frac{d\,\delta\bar{x}}{d\tau} - \frac{\delta\,d\bar{x}}{d\tau}\right).$$

Nun ist aber

$$E = \tfrac{1}{2}\bar{v}\bar{v},$$

d. h.

$$\delta E = \bar{v}\,\delta\bar{v} = \bar{v}\,\delta\left(\frac{d\bar{x}}{d\tau}\right).$$

Wir erhalten also jetzt die virtuelle Arbeit der Beschleunigung in der Form

$$\bar{w}\,\delta\bar{x} = \frac{d}{d\tau}(\bar{v}\,\delta\bar{x}) - \delta E - \bar{v}\left(\frac{d\,\delta\bar{x}}{d\tau} - \frac{\delta\,d\bar{x}}{d\tau}\right) \tag{2}$$

und bezeichnen diese Formel als „allgemeine Zentralgleichung". Sie kommt bei Lagrange in dieser ganz allgemeinen Fassung, welche Herr Hamel*) eingeführt hat, noch nicht vor, sondern ist dort durch die Annahme

$$d\,\delta\bar{x} - \delta\,d\bar{x} = 0$$

beschränkt, welche den Anschauungen der „Variationsrechnung" entspricht, aber nicht dem oben entwickelten allgemeinen Begriff der virtuellen Verschiebung**).

---

*) „Über die virtuellen Verschiebungen in der Mechanik". Math. Ann. 59.

**) Man vergleiche die Entwicklungen in Nr. 64.

Zur besseren Unterscheidung wollen wir die Lagrangesche Formel

$$\bar{w} \cdot \delta \bar{x} = \frac{d}{d\tau}(\bar{v}\,\delta\bar{x}) - \delta E \tag{3}$$

einfach als „Zentralgleichung" bezeichnen. Ihr Inhalt läßt sich in Worten einfach aussprechen:

Die virtuelle Arbeit der Beschleunigung ist gleich der auf die Zeiteinheit bezogenen Änderung der virtuellen Arbeit der Geschwindigkeit vermindert um die virtuelle Änderung der kinetischen Energie.

Wir gehen jetzt zu einer Anwendung der allgemeinen Gleichung (2) über.

63. Ableitung der Lagrangeschen Gleichungen aus der allgemeinen Zentralgleichung. Wir gehen aus von der Definition des Bahnelementes und der allgemeinen virtuellen Verschiebung des Punktes X, also von den Gleichungen:

$$d\bar{x} = \bar{e}_1 \cdot d\vartheta_1 + \bar{e}_2 \cdot d\vartheta_2\,, \quad \delta\bar{x} = \bar{e}_1 \cdot \delta\vartheta_1 + \bar{e}_2 \cdot \delta\vartheta_2\,.$$

Aus den Annahmen in Nr. 62 folgt

$$\begin{aligned} \delta\,d\bar{x} - d\,\delta\bar{x} &= \bar{e}_1(\delta\,d\vartheta_1 - d\,\delta\vartheta_1) + \bar{e}_2(\delta\,d\vartheta_2 - d\,\delta\vartheta_2) \\ &+ \left(\frac{\partial \bar{e}_1}{\partial\vartheta_1}\delta\vartheta_1 + \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial\vartheta_2}\delta\vartheta_2\right)d\vartheta_1 + \left(\frac{\partial \bar{e}_2}{\partial\vartheta_1}\delta\vartheta_1 + \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial\vartheta_2}\delta\vartheta_2\right)d\vartheta_2 \\ &- \left(\frac{\partial \bar{e}_1}{\partial\vartheta_1}d\vartheta_1 + \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial\vartheta_2}d\vartheta_2\right)\delta\vartheta_1 - \left(\frac{\partial \bar{e}_2}{\partial\vartheta_1}d\vartheta_1 + \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial\vartheta_2}d\vartheta_2\right)\delta\vartheta_2\,. \end{aligned}$$

Hierin ist aber

$$\frac{\partial \bar{e}_1}{\partial\vartheta_2} = \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial\vartheta_1}\,.$$

Deshalb wird

$$\delta\,d\bar{x} - d\,\delta\bar{x} = \bar{e}_1(\delta\,d\vartheta_1 - d\,\delta\vartheta_1) + \bar{e}_2(\delta\,d\vartheta_2 - d\,\delta\vartheta_2)\,. \tag{1}$$

Wir berechnen nun der Reihe nach die Ausdrücke, welche wir für die Ausbildung der Zentralgleichung gebrauchen:

$$\bar{v}(\delta\,d\bar{x} - d\,\delta\bar{x}) = P_1(\delta\,d\vartheta_1 - d\,\delta\vartheta_1) + P_2(\delta\,d\vartheta_2 - d\,\delta\vartheta_2)\,,$$

$$\bar{v}\,\delta\bar{x} = P_1\,\delta\vartheta_1 + P_2\,\delta\vartheta_2\,,$$

$$d(\bar{v}\,\delta\bar{x}) = P_1\,d\,\delta\vartheta_1 + P_2\,d\,\delta\vartheta_2 + dP_1 \cdot \delta\vartheta_1 + dP_2 \cdot \delta\vartheta_2$$

und

$$\delta E = P_1 \cdot \delta\dot{\vartheta}_1 + P_2\,\delta\dot{\vartheta}_2 + \frac{\partial E}{\partial\vartheta_1}\delta\vartheta_1 + \frac{\partial E}{\partial\vartheta_2}\delta\vartheta_2\,.$$

Dies alles setzen wir in Gleichung (1) von Nr. 62 ein und erhalten:

$$\bar{w}\,\delta\bar{x} = P_1\left(\frac{d\,\delta\vartheta_1}{d\tau} - \delta\dot{\vartheta}_1\right) + P_2\left(\frac{d\,\delta\vartheta_2}{d\tau} - \delta\dot{\vartheta}_2\right)$$

$$+ P_1\left(\frac{\delta\,d\vartheta_1}{d\tau} - \frac{d\delta\vartheta_1}{d\tau}\right) + P_2\left(\frac{\delta\,d\vartheta_2}{d\tau} - \frac{d\,\delta\vartheta_2}{d\tau}\right)$$

$$+ \left(\frac{dP_1}{d\tau} - \frac{\partial E}{\partial\vartheta_1}\right)\delta\vartheta_1 + \left(\frac{dP_2}{d\tau} - \frac{\partial E}{\partial\vartheta_2}\right)\delta\vartheta_2\,.$$

Hierin ist aber

$$\delta\dot{\vartheta}_1 = \frac{\delta\,d\vartheta_1}{d\tau} \quad \text{und} \quad \delta\dot{\vartheta}_2 = \frac{\delta\,d\vartheta_2}{d\tau}\,.$$

Folglich verschwinden alle Glieder, welche die Faktoren P_1 und P_2 besitzen, so daß nur der einfache Ausdruck

$$\bar{w}\,\delta\bar{x} = \left(\frac{dP_1}{d\tau} - \frac{\partial E}{\partial\vartheta_1}\right)\delta\vartheta_1 + \left(\frac{dP_2}{d\tau} - \frac{\partial E}{\partial\vartheta_2}\right)\delta\vartheta_2 = Q_1\,\delta\vartheta_1 + Q_2\,\delta\vartheta_2$$

übrig bleibt und es wird, wie früher auf andere Weise abgeleitet,

$$Q_1 = \frac{dP_1}{d\tau} - \frac{\partial E}{\partial\vartheta_1}\,, \quad Q_2 = \frac{dP_2}{d\tau} - \frac{\partial E}{\partial\vartheta_2}\,.$$

64. Die virtuellen Bahnen. Bisher haben wir die virtuelle Verrückung des in seiner Bahn laufenden Punktes X keinen besonderen Beschränkungen unterworfen. Eine solche allgemeine virtuelle Verschiebung sei in Fig. 39 durch die unendlich kleine Strecke $XP = \delta\bar{x}$ dargestellt. Befände sich nun der laufende Punkt tatsächlich in P, so würde sein Bahnelement*) in der Zeit $d\tau$ durch die Strecke $PP' = d\bar{x} + \delta d\bar{x}$ ausgedrückt sein. In derselben Zeit ist aber der Punkt X in seiner wirklichen Bahn um die Strecke $d\bar{x}$ fortgeschritten, also nach X' gelangt. Der der neuen Lage X' entsprechende allgemeine Verrückung ist in der Figur durch die Strecke $X'P''$ angedeutet und wir haben hierfür den Ausdruck: $\delta\bar{x} + d\,\delta\bar{x}$.

Offenbar fallen die Punkte P' und P'' keineswegs zusammen, wenn zu der bisherigen Definition der virtuellen Verrückung nicht eine weitere Festsetzung hinzutritt.

Wir wollen nun geradezu verlangen, daß P' in P'' fällt, daß also aus den betrachteten Strecken ein ge-

*) In Fig. 39 ist $d\,\delta\bar{x}$ mit $\delta\,d\bar{x}$ zu vertauschen.

schlossenes Viereck entsteht. Dann muß die geometrische Summe der vier Seiten gleich Null sein, d. h.

$$\delta\bar{x} + (d\bar{x} + \delta d\bar{x}) - (\delta\bar{x} + d\,\delta\bar{x}) - d\bar{x} = 0$$

sein. Unsere Schließungsbedingung hat also die Relation

$$d\,\delta\bar{x} - \delta\,d\bar{x} = 0 \tag{1}$$

zur Folge und führt von der allgemeinen Zentralgleichung zur Lagrangeschen Form derselben.

Diese Verrückungen aller Punkte der wirklichen Bahn bilden jetzt wieder Bahnen auf der Fläche, welche wir die zugehörigen virtuellen Bahnen nennen wollen. Sie sind

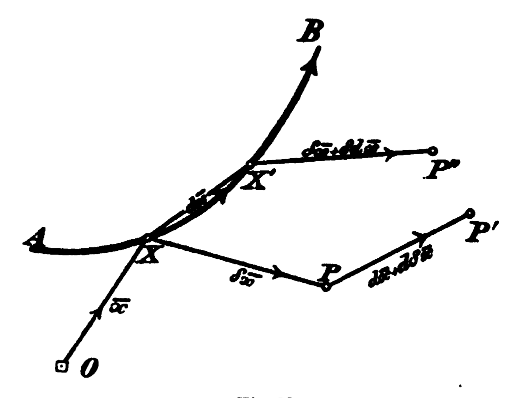


Fig. 39.

in der „Variationsrechnung" der Mathematiker der Ausgangspunkt für die Behandlung zahlreicher Probleme geworden. In der Mechanik haben sie vor den allgemeinen virtuellen Verrückungsgebilden prinzipiell nichts voraus, wenn sie auch in besonderen Fällen eine Vereinfachung der Rechnung ermöglichen.

Wir gehen jetzt auf die allgemeine Beziehung

$$d\,\delta\bar{x} - \delta\,d\bar{x} = \bar{e}_1(d\,\delta\vartheta_1 - \delta\,d\vartheta_1) + \bar{e}_2(d\,\delta\vartheta_2 - \delta\,d\vartheta_2) \tag{2}$$

zurück und nehmen an, daß die Gleichung (1) für jeden Punkt der wirklichen Bahn gültig sei. Dann wird also:

$$\bar{e}_1(d\,\delta\vartheta_1 - \delta\,d\vartheta_1) + \bar{e}_2(d\,\delta\vartheta_2 - \delta\,d\vartheta_2) = 0\,. \tag{3}$$

Da $\bar{e}_1$ und $\bar{e}_2$ nicht beständig in ihren Richtungen zusammenfallen können, so wird diese Gleichung nur durch die Annahmen

$$(4) \qquad d\,\delta\vartheta_1 = \delta\,d\vartheta_1 \quad \text{und} \quad d\,\delta\vartheta_2 = \delta\,d\vartheta_2$$

für den ganzen Verlauf der Bahn erfüllt werden. Es läßt sich daher jetzt der Satz aussprechen:

Im allgemeinen bilden die Lagen der Punkte einer Bahn nach den virtuellen Verrückungen zusammen mit den virtuell geänderten Wegelementen nicht wieder mögliche (gedachte) Bahnen auf der gegebenen Fläche. Dies ist nur der Fall, wenn die Gleichung $d\,\delta\bar{x} = \delta\,d\bar{x}$ *besteht. Unter dieser besonderen Voraussetzung genügen aber die Parameter* ϑ_1 *und* ϑ_2 *der Fläche den Bedingungen* $d\,\delta\vartheta_1 = \delta\,d\vartheta_1$ *und* $d\,\delta\vartheta_2 = \delta\,d\vartheta_2$.

Natürlich folgt auch umgekehrt aus

$$d\,\delta\vartheta_1 - \delta\,d\vartheta_1 = 0 \quad \text{und} \quad d\,\delta\vartheta_2 - \delta\,d\vartheta_2 = 0\,,$$

daß

$$d\,\delta\bar{x} - \delta\,d\bar{x} = 0$$

ist.

Beziehungen von der Form der Gleichungen (1), (3) und (4) wollen wir im folgenden als Übergangsgleichungen (Transitivitätsgleichungen) bezeichnen, da sie die Wirkung der Operation δ auf die Operation d definieren und damit dem Prozeß der virtuellen Verrückungen gewisse Beschränkungen auferlegen. Das trifft für Gleichung (2) nicht zu, aber wir wollen sie doch, wenn auch im weiteren Sinne, zu den Übergangsgleichungen zählen.

C) Bewegung des Punktes auf einer festen Kurve.

65. Geschwindigkeit und Beschleunigung. Die feste Bahn des Punktes nehmen wir in der Parameterform

$$(1) \qquad \bar{x} = \bar{f}(\vartheta)$$

an. Daraus erhält man

$$\bar{v} = \frac{d\bar{x}}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{d\tau}$$

oder

$$(2) \qquad \bar{v} = \bar{e}\cdot\dot{\vartheta}\,, \quad \text{woraus} \quad v = e\,\frac{d\vartheta}{d\tau}$$

folgt.

Nun ist aber $\bar{e} = e \cdot \bar{\sigma}$, wenn wir wieder mit $\bar{\sigma}$ den Einheitsvektor XS (Fig. 40) auf der Tangente bezeichnen. $\bar{e}$ ist der einzige hier vorkommende Begleitvektor. Die Geschwindigkeit fällt also immer in die Tangente der festen Bahn, die Beschleunigung dagegen nicht. Denn es wird

$$\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{d\tau} = \bar{e}\ddot{\vartheta} + \frac{d\bar{e}}{d\vartheta} \cdot \dot{\vartheta}^2 . \tag{3}$$

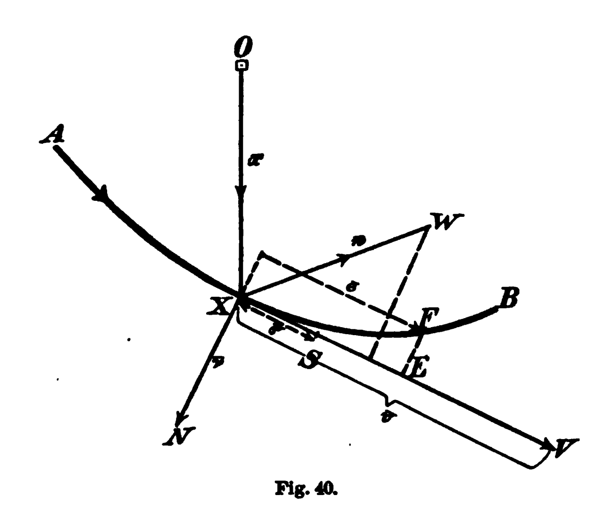


Fig. 40.

In dieser Gleichung ist nach Nr. 26

$$\frac{d\bar{e}}{d\vartheta} = \frac{d^2\bar{x}}{d\vartheta^2} = \frac{1}{r}\left(\frac{ds}{d\vartheta}\right)^2 \cdot \bar{\nu} + \left(\frac{d^2s}{d\vartheta^2} : \frac{ds}{d\vartheta}\right) \cdot \bar{e} ,$$

wenn r den Radius der Biegung, ds die Länge des Kurvenelementes und $\bar{\nu}$ den Normalvektor XN bezeichnet. Hier ist

$$\frac{ds}{d\vartheta} = e \quad \text{und} \quad \frac{d^2s}{d\vartheta^2} = \frac{de}{d\vartheta} .$$

Es wird also

$$\bar{w} = \left(\frac{1}{e}\frac{de}{d\vartheta}\dot{\vartheta}^2 + \frac{d^2\vartheta}{d\tau^2}\right) \cdot \bar{e} + \frac{v^2}{r} \cdot \bar{\nu} , \tag{4}$$

wie man auch sofort aus der Gleichung

$$\bar{w} = \frac{dv}{d\tau} \cdot \bar{\sigma} + \frac{v^2}{r} \cdot \bar{\nu}$$

in Nr. 36 hätte schließen können, da $v = e\frac{d\vartheta}{d\tau}$ ist.

Gleichung (4) zeigt die Zerlegung der ganzen Beschleunigung $\bar{w}$ nach der Tangente und der Normale. Aus ihr erhält man das Begleitmoment der Beschleunigung

$$\bar{e}\,\bar{w} = Q = e^2 \frac{d^2\vartheta}{d\tau^2} + e\frac{de}{d\vartheta} \cdot \left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)^2. \tag{5}$$

Wir wollen nun noch zeigen, daß dieses Resultat auch aus der Lagrangeschen Gleichung

$$Q = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial E}{\partial \vartheta} \tag{6}$$

folgt. Hierin ist nach Gleichung (2)

$$E = \tfrac{1}{2} e^2 \cdot \dot{\vartheta}^2$$

zu setzen. Dann wird

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\vartheta}} = e^2 \cdot \dot{\vartheta}, \quad \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\vartheta}}\right) = e^2 \cdot \ddot{\vartheta} + 2e\frac{de}{d\vartheta} \cdot \dot{\vartheta}^2$$

und

$$\frac{\partial E}{\partial \vartheta} = e\frac{de}{d\vartheta} \cdot \dot{\vartheta}^2.$$

Mithin

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial E}{\partial \vartheta} = e^2 \cdot \ddot{\vartheta} + e\frac{de}{d\vartheta} \cdot \dot{\vartheta}^2,$$

was mit dem Ausdruck der Gleichung (5) genau übereinstimmt.

Für die Anwendungen ist es bequemer

$$e^2 = F$$

zu setzen, so daß auch F eine bekannte Funktion von ϑ ist.

Mit dieser Bezeichnung wird das Begleitmoment der Beschleunigung

$$Q = F \cdot \frac{d^2\vartheta}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\frac{dF}{d\vartheta}\left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)^2. \tag{7}$$

Aufgabe 40. Man entwickle die Größe Q unter der Voraussetzung, daß die feste Bahn ein Kreis mit der Gleichung $\bar{x} = \bar{a}\cos\vartheta + \overline{\eta a}\sin\vartheta$ ist.

Aufgabe 41. Welches ist der Ausdruck für die ganze Beschleunigung $\bar{w}$, wenn die feste Bahn eine Schraubenlinie ist? Man vergleiche Nr. 24. In dem Resultat für $\bar{w}$ setze man $\dot{\vartheta} = \omega$ (konstant).

Aufgabe 42. Ein Punkt bewegt sich auf einer Parabel, (Fig. 41), deren Gleichung $x^2 = 2py$ ist. Man soll das Begleitmoment der Beschleunigung als Funktion von y, $\frac{dy}{d\tau}$ und $\frac{d^2y}{d\tau^2}$ darstellen.

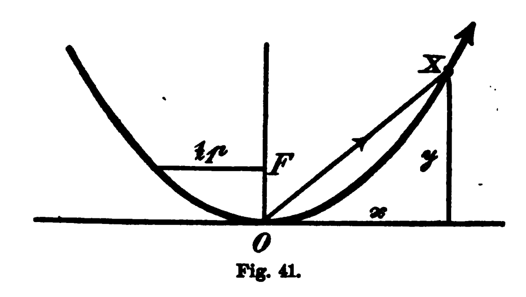


Fig. 41.

Anmerkung. Da bei der letzten Aufgabe die Gleichung der Kurve in gewöhnlichen rechtwinkligen Koordinaten gegeben ist, so bilde man zunächst daraus

$$x\dot{x} = p\dot{y}\,, \quad \text{d. h.} \quad \dot{x} = p\frac{\dot{y}}{\sqrt{2py}}$$

und dann

$$E = \tfrac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\frac{p}{y}\cdot\dot{y}^2 + \dot{y}^2\right].$$

Nachdem der Ausdruck

$$E = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{p}{2y}\right]\dot{y}^2$$

gewonnen ist, kann man y als laufenden Parameter betrachten und das verlangte Begleitmoment nach der Lagrangeschen Formel

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial E}{\partial y}$$

berechnen. Man versäume jedoch nicht, sich über Größe, Richtung und Dimension des Begleitvektors in diesem Falle volle Klarheit zu verschaffen und gewöhne sich überhaupt daran, Vektoren richtig aufzufassen, wenn keine vektorielle Bezeichnungsweise angewendet wird.

66. Der Energiesatz für Bewegungen auf fester Bahn. Die dem Bahnelement $d\bar{x}$ entsprechende Arbeit der Beschleunigung ist bestimmt durch den Ausdruck:

$$dA = \overline{w} \cdot d\bar{x} = \overline{w}\,\bar{e} \cdot d\vartheta = Q \cdot d\vartheta\,.$$

Folglich wird für eine endliche Bahnstrecke, welche durch die Parameterwerte ϑ_0 und ϑ begrenzt ist, die zugehörige Arbeit der Beschleunigung:

$$A = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} Q\,d\vartheta\,, \tag{1}$$

oder nach Gleichung (7) von Nr. 65:

$$A = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \left[F\frac{d^2\vartheta}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\frac{dF}{d\vartheta}\left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)^2\right] d\vartheta\,.$$

In diesem Integral ist F eine durch die feste Bahn bestimmte Funktion des Parameters ϑ, während $\dfrac{d\vartheta}{d\tau}$ eine durchaus willkürliche Größe ist. Wir wollen nun festsetzen, sie sei eine bekannte Funktion des Parameters ϑ, indem wir schreiben:

$$\dot{\vartheta} = \psi(\vartheta)\,.$$

Unter dieser Voraussetzung wird

$$A = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \left[F\psi\frac{d\psi}{d\vartheta} + \frac{1}{2}\frac{dF}{d\vartheta}\cdot\psi^2\right] d\vartheta = \frac{1}{2}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{d}{d\vartheta}(F\psi^2)\,d\vartheta = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} dE$$

und die Ausführung des Integrals gibt

$$A = E - E_0\,, \tag{2}$$

wenn E_0 den Wert der kinetischen Energie für $\vartheta = \vartheta_0$ darstellt.



Dasselbe Resultat folgt auch unmittelbar aus der Beziehung:

$$\frac{dA}{d\tau} = \overline{w}\,\overline{v} = \frac{dE}{d\tau}\,.$$

Der Inhalt der Gleichung (2) läßt sich in dem Satze aussprechen:

Ist die kinetische Energie eines auf einer festen Kurve laufenden Punktes für jede Lage in der Bahn bekannt, so ist auch die Arbeit der Beschleunigung für eine beliebige Bahnstrecke explizit gegeben durch den Zuwachs der kinetischen Energie, welcher vom Anfangspunkt bis zum Endpunkt der in Betracht gezogenen Bahnstrecke erreicht wird.

Man kann diesen Sachverhalt auch umgekehrt auffassen, indem man annimmt, Q sei eine bekannte Funktion des Parameters ϑ, wie es in bestimmten wichtigen Fällen kinetischer Probleme realisiert ist. Dann ist nach der Gleichung (2) die kinetische Energie E und damit auch die Parametergeschwindigkeit $\dot{\vartheta}$ sowie $\overline{v}$ für jede Lage des Punktes in der Bahn bekannt. Diese merkwürdige Beziehung wurde bereits von Galilei für die Kreisbahn des sogenannten einfachen oder mathematischen Pendels bemerkt und zur methodischen Untersuchung der Pendelbewegung unter dem Einfluß der Schwerkraft benutzt.

Aufgabe 43. Bei der Pendelbewegung ist, wie wir in der Dynamik beweisen, $Q = -a\,g \sin\vartheta$, wo (Fig. 42) a die Pendellänge, ϑ der Ausschlagwinkel und g die Beschleunigung der Erdschwere bedeutet. Es soll $\overline{v}$ für eine beliebige Lage des Pendelpunktes bestimmt werden. Welchen Ausdruck erhält man jetzt für $\overline{w}$ als Funktion von ϑ, wenn $\dot{\vartheta} = 0$ für $\vartheta = \alpha$ ist?

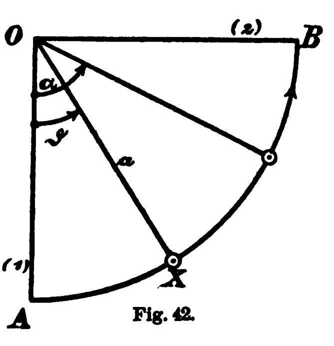


Fig. 42.

67. Beschleunigungsdruck auf die feste Bahn. Nach Gleichung (4) in Nr. 65 kennt man die spannende Beschleunigung nach Größe und Richtung. Sie ist

$$(1) \qquad \overline{w}_s = \frac{v^2}{r} \cdot \overline{\nu}\,,$$

fällt also beständig in die Richtung des Normalvektors und ist dem Quadrat der Geschwindigkeit direkt, sowie dem Biegungsradius (r) umgekehrt proportional.

Nach Gleichung (2) in Nr. 40 ist:

$$\frac{1}{r} = \frac{\overline{v w}}{v^3}.$$

In unserem Falle hat man

$$\overline{w} = \overline{e}\ddot{\vartheta} + \frac{d\overline{e}}{d\vartheta} \cdot \dot{\vartheta}^2.$$

Folglich

$$\overline{v w} = \overline{e \frac{de}{d\vartheta}} \cdot \dot{\vartheta}^3.$$

Man erhält also die Biegung aus dem Begleitvektor durch die Anwendung der Formel:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{e^3} \cdot \overline{e \frac{de}{d\vartheta}}. \tag{2}$$

Bei Benutzung rechtwinkliger Raumkoordinaten setze man

$$\overline{e \frac{de}{d\vartheta}} = \overline{H}$$

und zerlege alles nach den drei Richtungen des Achsenkreuzes, so daß

$$\overline{H} = \overline{H_1} + \overline{H_2} + \overline{H_3}$$

wird. Hierbei ist

$$\left\{\begin{aligned} H_1 &= e_2 \frac{de_3}{d\vartheta} - e_3 \frac{de_1}{d\vartheta}, \\ H_2 &= e_3 \frac{de_1}{d\vartheta} - e_1 \frac{de_3}{d\vartheta}, \\ H_3 &= e_1 \frac{de_2}{d\vartheta} - e_2 \frac{de_1}{d\vartheta}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Ferner

$$H^2 = H_1^2 + H_2^2 + H_3^2.$$

Hiernach erhält man

$$\frac{1}{r} = \frac{H}{e^3}. \tag{4}$$

Nachdem der Ausdruck für die Biegung der festen Bahn gefunden ist, schreitet man zur Berechnung von $\bar{\nu}$. Aus Nr. 26 findet man sofort, indem man dort

$$\frac{d\bar{x}}{d\vartheta} = \bar{e}$$

setzt:

$$\bar{\nu} = \frac{r}{e^3}\left(e\frac{d\bar{e}_1}{d\vartheta} - \frac{de}{d\vartheta}\cdot\bar{e}\right) \tag{5}$$

oder in rechtwinkligen Komponenten:

$$\left\{\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{r}{e^3}\left(e\frac{de_1}{d\vartheta} - e_1\frac{de}{d\vartheta}\right), \\ \nu_2 &= \frac{r}{e^3}\left(e\frac{de_2}{d\vartheta} - e_2\frac{de}{d\vartheta}\right), \\ \nu_3 &= \frac{r}{e^3}\left(e\frac{de_3}{d\vartheta} - e_3\frac{de}{d\vartheta}\right). \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Hiermit sind alle geometrischen Größen für die Berechnung der spannenden Beschleunigung, die man auch zuweilen als Beschleunigungsdruck bezeichnet, explizit dargestellt.

Aufgabe 44. Man bestimme den Beschleunigungsdruck $\bar{w}_s$ auf der Kreisbahn $\bar{x} = \bar{a}\cos\vartheta + \overline{\eta\,a}\sin\vartheta$ unter der Annahme einer konstanten Winkelbeschleunigung $\ddot{\vartheta} = \beta$.

Aufgabe 45. Ein Punkt bewege sich mit gleichmäßiger Geschwindigkeit $v = c$ auf der festen zylindrischen Schraubenlinie (cf. Nr. 24):

$$\bar{x} = \bar{a}\cos\vartheta + \overline{\eta_1 a}\sin\vartheta + \frac{h}{2\pi}\vartheta\cdot\bar{\eta}.$$

Welchen angenäherten Ausdruck erhält man für $\bar{w}_s$ unter der Voraussetzung, daß die dritten und höheren Potenzen von $\frac{h}{2\pi a}$ vernachlässigt werden können?

D) Die Lagrangeschen Gleichungen für die freie Bewegung des Punktes im Raume.

68. Allgemeine Raumkoordinaten. Bisher haben wir, soweit die spezifischen Lagrangeschen kinematischen Auffassungen für die Punktbewegung in Betracht kamen, das

Bewegungsgebiet des Punktes auf eine feste Fläche oder eine feste Kurve beschränkt. Wir wollen nun zeigen, was der Leser übrigens schon längst bemerkt haben wird, daß diese Methoden ohne irgend welche Abänderungen auch für die freie Raumbewegung gültig bleiben. Es werden natürlich jetzt drei Parameter für die Festlegung der Lage erforderlich sein, da der Punkt im Raume, wie man sich gewöhnlich ausdrückt, drei Grade der Bewegungsfreiheit besitzt.

Ein sehr einfaches Beispiel bieten uns die räumlichen Polarkoordinaten, die wir sofort aus der Kugelgleichung (Nr. 50):

$$\bar{x} = \cos\beta\cos\lambda\cdot\bar{a} + \cos\beta\sin\lambda\cdot\overline{\eta\, a} + a\sin\beta\cdot\bar{\eta}$$

erhalten, indem wir uns den Radius der Kugel veränderlich vorstellen, also a durch $a\varrho$ ersetzen, wo ϱ den dritten Parameter bedeutet. Legt man nun den drei Größen β, λ, ϱ alle möglichen Werte bei, so wird jeder Punkt des dreidimensionalen Raumes erreicht. Der Ausdruck

$$\bar{x} = \varrho(\cos\beta\cos\lambda\cdot\bar{a} + \cos\beta\sin\lambda\cdot\overline{\eta\, a} + a\sin\beta\cdot\bar{\eta}) \tag{1}$$

stellt also jede beliebige Lage eines frei beweglichen Punktes X im Raume durch seinen Vektor $OX = \bar{x}$ dar.

Wir wollen zur besseren geometrischen Auffassung dieser Koordinierung des Raumpunktes 1. ϱ und β, 2. β und λ, sowie 3. λ und ϱ als Parametergruppen auffassen, indem wir der Reihe nach λ, ϱ und β als konstante Größen betrachten. Dann erhält man aus Gleichung (1) die folgenden drei Flächensysteme dargestellt durch die Gleichungen:

$$\bar{x} = \varrho\,[\cos\beta\,(\cos\lambda_0\cdot\bar{a} + \sin\lambda_0\cdot\overline{\eta\, a}) + a\sin\beta\cdot\bar{\eta}], \tag{2}$$

$$\bar{x} = \varrho_0\,[\cos\beta\,(\cos\lambda\cdot\bar{a} + \sin\lambda\cdot\overline{\eta\, a}) + a\sin\beta\cdot\bar{\eta}], \tag{3}$$

$$\bar{x} = \varrho\,[\cos\beta_0\,(\cos\lambda\cdot\bar{a} + \sin\lambda\cdot\overline{\eta\, a}) + a\sin\beta_0\cdot\bar{\eta}]. \tag{4}$$

Beachtet man jetzt im Hinblick auf die Gleichung (2), daß der Vektor

$$\cos\lambda_0\cdot\overline{\eta\, a} - \sin\lambda_0\cdot\bar{a}$$

auf den beiden Vektoren

$$\cos\lambda_0\cdot\bar{a} + \sin\lambda_0\cdot\overline{\eta\, a} \quad \text{und} \quad \bar{\eta}$$

senkrecht steht, so folgt aus Gleichung (2):

$$(\cos\lambda_0\cdot\overline{\eta\, a} - \sin\lambda_0\cdot\bar{a})\,\bar{x} = 0, \tag{5}$$

also die Gleichung einer **Meridianebene** durch den Bezugspunkt, da ihr Normalvektor

$$(5\text{a})\qquad (\cos\lambda_0\cdot\overline{\eta a}-\sin\lambda_0\cdot\bar{a}):a=\bar{\alpha}$$

stets auf $\bar{\eta}$ senkrecht steht.

Die Gleichung (3) stellt eine **Kugel** mit dem Radius $a\varrho_0$ dar. Hält man die Gleichung (4) neben die Gleichung (1) von Nr. 60, so erkennt man ohne weiteres, daß sie eine **Kegelfläche** mit der Achse $\bar{\eta}$ und der Öffnung $\pi-2\beta_0$ darstellt.

Der Punkt X_0 erscheint demnach als Schnitt dieser drei Flächen. Nun schneiden sich dieselben aber in vier Punkten*). Von diesen wird durch Gleichung (1) ein bestimmter ausgewählt, da ϱ_0, $\cos\beta_0$, $\sin\beta_0$, $\cos\lambda_0$, $\sin\lambda_0$ eindeutige Werte besitzen.

Jetzt wollen wir in der Gleichung (1) je zwei Parameter festhalten. Dieser Anschauung entsprechen die folgenden **Kurvengleichungen**:

$$(6)\qquad \bar{x}=\varrho_0\,[\cos\beta\,(\cos\lambda_0\cdot\bar{a}+\sin\lambda_0\cdot\overline{\eta a})+a\sin\beta\cdot\bar{\eta}]\,,$$

$$(7)\qquad \bar{x}=\varrho_0\,[\cos\beta_0(\cos\lambda\cdot\bar{a}+\sin\lambda\cdot\overline{\eta a})+a\sin\beta_0\cdot\bar{\eta}]\,,$$

$$(8)\qquad \bar{x}=\varrho\,[\cos\beta_0(\cos\lambda_0\cdot\bar{a}+\sin\lambda_0\cdot\overline{\eta a})+a\sin\beta_0\cdot\bar{\eta}]\,.$$

Aus Gleichung (5a) erhält man

$$a\cdot\overline{\alpha\eta}=\cos\lambda_0\cdot\bar{a}+\sin\lambda_0\cdot\overline{\eta a}\,.$$

Folglich nimmt jetzt die Gleichung (6) die Form an:

$$(9)\qquad \bar{x}=a\,\varrho_0(\sin\beta\cdot\bar{\eta}+\cos\beta\cdot\overline{\alpha\eta})\,.$$

Das ist aber die Gleichung eines **größten Kugelkreises** durch den Endpunkt von $a\varrho\cdot\bar{\eta}$, also ein **Meridian**.

Gleichung (7) stellt ebenfalls einen Kreis dar, dessen Radius aber $a\varrho_0\cos\beta_0$ ist. Sein Mittelpunkt ist durch den Vektor

$$\bar{z}=a\,\varrho_0\sin\beta_0\cdot\bar{\eta}$$

festgelegt. Die zweite Kurve ist also ein **Parallelkreis** auf der Kugel. Gleichung (1) stellt eine **Gerade** dar, die mit dem Radiusvektor zusammenfällt.

Wir bilden jetzt aus den Gleichungen (6) bis (8) der Reihe nach

$$(10)\quad d\bar{x}=\varrho_0\,[-\sin\beta(\cos\lambda_0\cdot\bar{a}+\sin\lambda_0\cdot\overline{\eta a})+a\cos\beta\cdot\bar{\eta}]\,d\beta\,,$$

$$(11)\quad d\bar{x}=\varrho_0\,[\cos\beta_0(-\sin\lambda\cdot\bar{a}+\cos\lambda\cdot\overline{\eta a}]\,d\lambda\,,$$

$$(12)\quad d\bar{x}=[\cos\beta_0(\cos\lambda_0\cdot\bar{a}+\sin\lambda_0\cdot\overline{\eta a})+a\sin\beta_0\cdot\bar{\eta}]\cdot d\varrho$$

*) Streng genommen kommt nur eine Halbebene und eine Halbkugel in Betracht.

und hieraus die Einheitsvektoren auf den Tangenten, des größten Kugelkreises, des Parallelkreises und der zu einer Geraden degenerierten dritten Kurve:

$$(13)\quad \bar{\sigma}_1 = [-\sin\beta(\cos\lambda_0\cdot\bar{a} + \sin\lambda_0\cdot\overline{\eta\, a}) + a\cos\beta\cdot\bar{\eta}] : a\,,$$

$$(14)\quad \bar{\sigma}_2 = (-\sin\lambda\cdot\bar{a} + \cos\lambda\cdot\overline{\eta\, a}) : a\,,$$

$$(15)\quad \bar{\sigma}_3 = [\cos\beta_0(\cos\lambda_0\cdot\bar{a} + \sin\lambda_0\cdot\overline{\eta\, a}) + a\sin\beta_0\cdot\bar{\eta}] : a\,,$$

denn die Bogenelemente $d\bar{x}$ sind nach (11), (12), (13) der Reihe nach $a\varrho_0\, d\beta$, $a\varrho_0\cos\beta_0\cdot d\lambda$ und $a\, d\varrho$.

Nach diesen ausführlichen Vorbereitungen, die selbstverständlich für Leser, welche mit der Parameterdarstellung eines Punktes im Raume vertraut sind, hätten entbehrt werden können, gehen wir zur Darstellung der Geschwindigkeit $\bar{v}$ über.

Aus der Gleichung (1) erhält man:

$$\bar{v} = \frac{\partial\bar{x}}{\partial\beta}\cdot\dot{\beta} + \frac{\partial\bar{x}}{\partial\lambda}\cdot\dot{\lambda} + \frac{\partial\bar{x}}{\partial\varrho}\cdot\dot{\varrho}$$

oder

$$\bar{v} = \bar{b}\cdot\dot{\beta} + \bar{l}\cdot\dot{\lambda} + \bar{r}\cdot\dot{\varrho}\,,$$

wenn man die drei Begleitvektoren mit $\bar{b}$, $\bar{l}$ und $\bar{r}$ bezeichnet. Man überzeugt sich nun sofort, daß

$$\bar{b} = b\cdot\bar{\sigma}_1\,,\quad \bar{l} = l\cdot\bar{\sigma}_2 \quad\text{und}\quad \bar{r} = r\cdot\bar{\sigma}_3$$

wird, wenn man in den Gleichungen (13) bis (15) den Index 0 wegläßt.

Wir verlassen nun das spezielle Beispiel der räumlichen Polarkoordinaten und nehmen an, $\bar{x}$ sei durch eine Gleichung von der Form

$$\bar{x} = \bar{f}(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$$

gegeben. Jetzt wird

$$\bar{v} = \bar{e}_1\cdot\dot{\vartheta}_1 + \bar{e}_2\cdot\dot{\vartheta}_2 + \bar{e}_3\cdot\dot{\vartheta}_3\,,$$

wo die Begleitvektoren durch

$$\bar{e}_1 = \frac{\partial\bar{x}}{\partial\vartheta_1}\,,\quad \bar{e}_2 = \frac{\partial\bar{x}}{\partial\vartheta_2}\,,\quad \bar{e}_3 = \frac{\partial\bar{x}}{\partial\vartheta_3}$$

definiert sind.

Im allgemeinen Falle werden die Vektoren nicht wie $\bar{b}$, $\bar{l}$ und $\bar{r}$ aufeinander senkrecht stehen, sondern den beweglichen Punkt als ein schiefwinkliges Achsenkreuz be-

gleiten, dessen Richtungen durch die Tangenten der Parameterkurven, welche in unserem speziellen Beispiel ein größter Kugelkreis, ein Parallelkreis und der Radiusvektor waren, vollständig bestimmt sind. Auch die Koordinatenflächen, die der Ebene, der Kugel und der Kegelfläche unseres Beispiels entsprechen, müssen im allgemeinen Falle als beliebige Flächen aufgefaßt werden.

69. Die Lagrangeschen Gleichungen in Raumkoordinaten. Aus der Gleichung:

$$\bar{v} = \bar{e}_1 \cdot \dot{\vartheta}_1 + \bar{e}_2 \cdot \dot{\vartheta}_2 + \bar{e}_3 \cdot \dot{\vartheta}_3$$

folgt

$$\bar{e}_1 \bar{v} = \bar{e}_1 \bar{e}_1 \cdot \dot{\vartheta}_1 + \bar{e}_1 \bar{e}_2 \cdot \dot{\vartheta}_2 + \bar{e}_1 \bar{e}_3 \cdot \dot{\vartheta}_3$$

und

$$E = \tfrac{1}{2} v^2 = \tfrac{1}{2} [\bar{e}_1 \bar{e}_1 \cdot \dot{\vartheta}_1^2 + 2 \bar{e}_1 \bar{e}_2 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 + 2 \bar{e}_1 \bar{e}_3 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_3 + \bar{e}_2 \bar{e}_2 \cdot \dot{\vartheta}_2^2$$
$$+ 2 \bar{e}_2 \bar{e}_3 \cdot \dot{\vartheta}_2 \dot{\vartheta}_3 + \bar{e}_3 \bar{e}_3 \cdot \dot{\vartheta}_3^2]$$

oder

$$E = \tfrac{1}{2} [E_{11} \dot{\vartheta}_1^2 + 2 E_{12} \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 + 2 E_{13} \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_3 + E_{22} \dot{\vartheta}_2^2$$
$$+ 2 E_{23} \dot{\vartheta}_2 \dot{\vartheta}_3 + E_{33} \dot{\vartheta}_3^2] \,.$$

Die Begleitmomente der Geschwindigkeit behalten die bekannte Form

$$\bar{e}_1 \bar{v} = P_1 = \frac{\partial E}{\partial \dot{\vartheta}_1} = E_{11} \cdot \dot{\vartheta}_1 + E_{12} \cdot \dot{\vartheta}_2 + E_{13} \cdot \dot{\vartheta}_3 \,,$$

$$\bar{e}_2 \bar{v} = P_2 = \frac{\partial E}{\partial \dot{\vartheta}_2} = E_{21} \cdot \dot{\vartheta}_1 + E_{22} \cdot \dot{\vartheta}_2 + E_{23} \cdot \dot{\vartheta}_3 \,,$$

$$\bar{e}_3 \bar{v} = P_3 = \frac{\partial E}{\partial \dot{\vartheta}_3} = E_{31} \cdot \dot{\vartheta}_1 + E_{32} \cdot \dot{\vartheta}_2 + E_{33} \cdot \dot{\vartheta}_3 \,.$$

Alle früheren Betrachtungen über die virtuellen Verschiebungen und die hiervon abgeleiteten Begriffe lassen sich auf den Fall der unbeschränkten Bewegung des Punktes im Raume ohne weiteres übertragen. Es wird also hier zunächst ganz allgemein

$$\delta \bar{x} = \bar{e}_1 \, \delta \vartheta_1 + \bar{e}_2 \, \delta \vartheta_2 + \bar{e}_3 \, \delta \vartheta_3 = \Sigma \bar{e} \, \delta \vartheta$$

und

$$\bar{v} \, \delta \bar{x} = P_1 \cdot \delta \vartheta_1 + P_2 \, \delta \vartheta_2 + P_3 \, \delta \vartheta_3 = \Sigma P \cdot \delta \vartheta \,,$$

sowie

$$d \, \delta \bar{x} - \delta \, d \bar{x} = \Sigma \bar{e} (d \, \delta \vartheta - \delta \, d \vartheta) \,.$$

Unterwerfen wir jetzt die virtuellen Änderungen der Parameter den Bedingungen

$$d\,\delta\vartheta_1 - \delta\,d\vartheta_1 = 0\,,\quad d\,\delta\vartheta_2 - \delta\,d\vartheta_2 = 0\,,\quad d\,\delta\vartheta_3 - \delta\,d\vartheta_3 = 0\,,$$

so bilden die Lagen der ursprünglichen Bahnpunkte nach dem so definierten Verrückungssystem eine virtuelle Bahn im Raum und man kann die Lagrangesche Zentralgleichung in der ursprünglichen Form (man vergleiche Nr. 62, Gleichung (3)) anwenden:

$$\bar{w}\,\delta\bar{x} = \frac{d}{d\tau}(\bar{v}\,\delta\bar{x}) - \delta E\,,$$

um die drei Begleitmomente der Beschleunigung zu bestimmen. Es ist nämlich

$$\frac{d}{d\tau}(\bar{v}\,\delta\bar{x}) = \frac{d}{d\tau}\sum P\,\delta\vartheta = \sum\frac{dP}{d\tau}\cdot\delta\vartheta + \sum P\frac{d\,\delta\vartheta}{d\tau}$$

und

$$\delta E = \sum\frac{\partial E}{\partial\vartheta}\,\delta\vartheta + \sum P\,\delta\left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)$$

$$= \sum\frac{\partial E}{\partial\vartheta}\,\delta\vartheta + \sum P\frac{\delta\,d\vartheta}{d\tau}\,.$$

Folglich wird

$$\bar{w}\,\delta\bar{x} = \sum Q\,\delta\vartheta = \sum\left(\frac{dP}{d\tau} - \frac{\partial E}{\partial\vartheta}\right)\cdot\delta\vartheta\,,$$

d. h.

$$Q_1 = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial E}{\partial\dot{\vartheta}_1}\right) - \frac{\partial E}{\partial\vartheta_1}\,,\quad Q_2 = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial E}{\partial\dot{\vartheta}_2}\right) - \frac{\partial E}{\partial\vartheta_2}\,,$$

$$Q_3 = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial E}{\partial\dot{\vartheta}_3}\right) - \frac{\partial E}{\partial\vartheta_3}\,,$$

da die virtuellen Parameteränderungen $\delta\vartheta_1$, $\delta\vartheta_2$, $\delta\vartheta_3$ trotz der Bedingungen $\delta\,d\vartheta - d\,\delta\vartheta = 0$ voneinander unabhängige Werte annehmen können. Durch die letzten Gleichungen sind die Begleitmomente der Beschleunigung $\bar{w}$ definiert.

Aufgabe 46. Man entwickle nach Nr. 68 für die dort eingeführten räumlichen Polarkoordinaten ϱ, β, λ den Ausdruck für die kinetische Energie und leite daraus die expliziten Formeln für die drei entsprechenden Begleitmomente Q_ϱ, Q_β und Q_λ ab.

70. Erweiterung der kinetischen Energie. Die Benutzung von drei allgemeinen Parametern für die Lagenbestimmung des Punktes im Raume ist streng genommen eine sehr künstliche und hat vom Standpunkt der Mechanik vor der Definitionsgleichung der Beschleunigung

$$\frac{d^2\bar{x}}{d\tau^2} = \bar{w}$$

und den entsprechenden einfachen Komponentengleichungen

$$\frac{d^2 x_1}{d\tau^2} = w_1, \quad \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} = w_2, \quad \frac{d^2 x_3}{d\tau^2} = w_3$$

nichts voraus. Dennoch kann die Kinematik gelegentlich von solchen allgemeinen Anschauungen Gebrauch machen, wie wir an einem von Lagrange*) durchgeführten Beispiel zeigen wollen.

Ein Punkt soll sich auf einer festen Kugelfläche vom Radius a beliebig bewegen. Sein Vektor in bezug auf den festen Mittelpunkt O sei $\bar{x}$, seine Geschwindigkeit $\bar{v}$ und die zugehörige kinetische Energie $E = \frac{1}{2} v^2$. Wir erweitern jetzt in der Vorstellung die Beweglichkeit dieses Punktes, indem wir annehmen, er könne aus der Kugelfläche in normaler Richtung heraustreten, wodurch sein Vektor in $\bar{x}'$ übergeht. Dann ist

$$\bar{x}' = \varrho \cdot \bar{x},$$

wo der neueingeführte Parameter ϱ die Eigenschaft hat, den Punkt für $\varrho = 1$ in die feste Kugelfläche zurückzuführen.

Es wird also für die erweiterte Bewegung

$$\frac{d\bar{x}'}{d\tau} = \bar{v}' = \varrho \cdot \bar{v} + \dot{\varrho}\,\bar{x}$$

und infolgedessen

$$E' = \tfrac{1}{2} v'^2 = \tfrac{1}{2} \varrho^2 v^2 + \tfrac{1}{2} a^2 \dot{\varrho}^2$$

oder

$$E' = \varrho^2 \cdot E + \tfrac{1}{2} a^2 \cdot \dot{\varrho}^2 .$$

Nun ist mit alleiniger Berücksichtigung des Parameters ϱ:

$$\frac{\partial E'}{\partial \dot{\varrho}} = a^2 \cdot \dot{\varrho}, \quad \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial E'}{\partial \dot{\varrho}}\right) = a^2 \ddot{\varrho}$$

und

$$\frac{\partial E'}{\partial \varrho} = 2\varrho \cdot E .$$

*) Mécan. analytique Bd. 2, pag. 167 (ed. Bertrand).

Folglich wird

$$Q_\varrho = a^2 \frac{d^2 \varrho}{d\tau^2} - 2\varrho \cdot E = \bar{x}\bar{w}\,,$$

denn es ist

$$\bar{x} = \frac{\partial \bar{x}'}{\partial \varrho}\,,$$

also für $\varrho = 1$

$$a\,w_\nu = -2E\,,$$

wenn w_ν die Projektion der ganzen Beschleunigung $\bar{w}$ auf die nach außen gerichtete Flächennormale (Radius) bedeutet.

Wir erhalten demnach für die spannende Beschleunigung den bekannten Wert

$$w_s = -w_\nu = \frac{v^2}{a}\,.$$

Es ist also gelungen, die spannende Beschleunigung in diesem Beispiel durch Berechnung der zur erweiterten Energie gehörenden Lagrangeschen Beschleunigungskomponente Q_ϱ zu erhalten.

71. Die konjugierten Begleitvektoren. Wir wollen uns um den im Raume beweglichen Punkt eine Kugelfläche beschrieben denken, welche von den drei Begleitvektoren durchstochen wird. Diese Punkte bilden dann ein sphärisches Dreieck. Schon die elementare Trigonometrie weist darauf hin, zu diesem Grunddreieck das sogenannte Polardreieck zu konstruieren, um die notwendigen metrischen Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln zu gewinnen. Dieses Polardreieck geht aus dem ursprünglichen hervor, indem man auf den Seitenflächen des zugehörigen Dreikants Senkrechte im Mittelpunkt der Kugelfläche errichtet und die Durchstichpunkte als Ecken wählt. Das ganz Analoge soll nun für die Begleitvektoren

$$\bar{e}_1 = \frac{\partial \bar{x}}{\partial \vartheta_1}\,, \quad \bar{e}_2 = \frac{\partial \bar{x}}{\partial \vartheta_2}\,, \quad \bar{e}_3 = \frac{\partial \bar{x}}{\partial \vartheta_3}$$

kurz ausgeführt werden.

Statt der Zahlen $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ wollen wir drei Strecken a_1, a_2, a_3 als Koordinaten nehmen, so daß die zugehörigen Begleitvektoren $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ jetzt Zahlen werden. Wir setzen also

$$\bar{v} = \bar{\varepsilon}_1 \cdot \dot{a}_1 + \bar{\varepsilon}_2 \cdot \dot{a}_2 + \bar{\varepsilon}_3 \cdot \dot{a}_3$$

und konstruieren aus $\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_2$, $\bar{\varepsilon}_3$ drei neue Vektoren nach den Gleichungen

$$(1) \qquad \overline{\varepsilon_2 \varepsilon_3} = \bar{\eta}_1 , \quad \overline{\varepsilon_3 \varepsilon_1} = \bar{\eta}_2 , \quad \overline{\varepsilon_1 \varepsilon_2} = \bar{\eta}_3 .$$

Diese entsprechen durchaus der Vorstellung des Polardreiecks in der sphärischen Trigonometrie. Wir wollen sie im Anschluß an die Bezeichnung Somoffs*) die „konjugierten Begleitvektoren" nennen.

Aus den Gleichungen (1) folgt nun unmittelbar

$$\bar{\varepsilon}_1 (\overline{\varepsilon_2 \varepsilon_3}) = \bar{\varepsilon}_1 \bar{\eta}_1 = \bar{\varepsilon}_2 \overline{\varepsilon_3 \varepsilon_1} = \bar{\varepsilon}_2 \bar{\eta}_2 = \bar{\varepsilon}_3 \overline{\varepsilon_1 \varepsilon_2} = \bar{\varepsilon}_3 \bar{\eta}_3 = \varDelta ,$$

wenn wir mit $\varDelta$ den Rauminhalt des Parallelepipeds aus den Kanten $\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_3$ bezeichnen.

Der Vektor der Beschleunigung $\bar{w}$ läßt sich jedenfalls durch eine Gleichung von der Form

$$\bar{w} = r_1 \cdot \bar{\eta}_1 + r_2 \cdot \bar{\eta}_2 + r_3 \cdot \bar{\eta}_3$$

ausdrücken, wenn r_1, r_2, r_3 vorläufig unbestimmte Koeffizienten von der zweiten Dimension sind.

Diese Bestimmung ist aber außerordentlich einfach. Denn man hat sofort die Beziehungen:

$$\bar{\varepsilon}_1 \bar{w} = q_1 = r_1 \cdot \varDelta , \quad \bar{\varepsilon}_2 \bar{w} = q_2 = r_2 \cdot \varDelta , \quad \bar{\varepsilon}_3 \bar{w} = q_3 = r_3 \cdot \varDelta .$$

Folglich wird

$$\varDelta \cdot \bar{w} = q_1 \cdot \bar{\eta}_1 + q_2 \cdot \bar{\eta}_2 + q_3 \cdot \bar{\eta}_3 .$$

Bezeichnen wir also die Absolutwerte der konjugierten Begleitvektoren $\bar{\eta}_1$, $\bar{\eta}_2$, $\bar{\eta}_3$ in der üblichen Weise mit η_1, η_2, η_3, so werden die Komponenten von $\bar{w}$ nach den Richtungen dieser neuen Begleitvektoren die folgenden sein:

$$w^{(1)} = \frac{q_1}{\varDelta} \cdot \eta_1 , \quad w^{(2)} = \frac{q_2}{\varDelta} \cdot \eta_2 , \quad w^{(3)} = \frac{q_3}{\varDelta} \cdot \eta_3 .$$

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich auch mit Leichtigkeit die Komponente der Beschleunigung $\bar{w}$ nach einer beliebigen Richtung im Raum.

---

*) „Kinematik", deutsch von Ziwet, Kapitel 8.

II. Abschnitt.

Elementare Punktsysteme.

---

72. Gebundene Systeme. Bisher haben wir ausschließlich den einzelnen Punkt als bewegliches Objekt betrachtet. Er trat also im Gesichtskreis der Kinematik zu anderen Punkten des Raumes in keine direkte Beziehung. Auf diesem Wege ist aber eine hinreichende Annäherung an die aktuelle Welt der Bewegungsprozesse nicht zu erreichen. Alle unsere bisherigen Betrachtungen sind daher nur die erste Stufe der Kinematik, welche als solche freilich nicht unterschätzt werden darf, wie man schon aus der früh ausgebildeten Theorie der Planetenbewegung erkennt. Vom Standpunkt der Kinematik ist die Auffassung eines Komplexes verschiedener Punkte, von denen jeder einzelne völlig freie Beweglichkeit im Raume hat, keine wesentlich neue Begriffsbildung, wenn sie auch zu einer Auffassung von Systemen führt, die in der Physik und Astronomie eine große Rolle gespielt hat und heute noch nicht veraltet erscheint. Die ganze strenge Atomistik des Altertums und ihre mannigfachen Neugestaltungen in dem Rahmen der modernen Naturwissenschaften beruhen auf der Untersuchung solcher freien Punktsysteme, auf die wir daher auch in der Dynamik zurückkommen müssen.

Im Gegensatz zu diesen freien Systemen diskreter Punkte stehen die gebundenen. Diese sind stets mathematische Fiktionen, die aber häufig schon so weit ausgebaut werden können, daß eine angenäherte Formulierung verwickelter Bewegungsprozesse der Wirklichkeit möglich wird. Der menschliche Geist schafft sich also in diesem Vorgehen elementare Modelle besonderer Bewegungsformen,

welche wir in der Natur beobachten. Der Zusammenhang der einzelnen Punkte eines gebundenen Systems ist im allgemeinen derart aufzufassen, daß die Beweglichkeit eines Punktes durch die Bewegung anderer Punkte des Systems irgendwie beschränkt ist. Sehr einfache Beispiele solcher Systeme zeigen uns die Atwoodsche Fallmaschine und das zusammengesetzte Pendel (Fig. 44). Im ersten Falle (Fig. 43) ist die Bewegung des Punktes B völlig bestimmt, wenn diejenige von A gegeben ist, wenn die biegsame über eine Rolle laufende Schnur von unveränderlicher Länge und stets

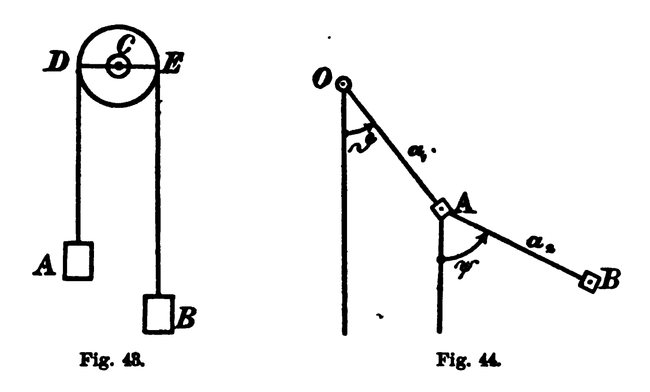


Fig. 43. Fig. 44.

parallel gespannt vorausgesetzt wird. Ein ganz analoger Zusammenhang besteht auch für die Punkte A und B (Fig. 44) des Doppel-Pendels OAB, dessen Glieder um die Punkte O und A in seiner Ebene schwingen können. Durch die Ausschlagwinkel ϑ und ψ ist die Lage des Systems völlig bestimmt.

Alle gebundenen Systeme, bei denen ein einziger veränderlicher Parameter (Systemkoordinate) ausreicht, um die Lage jedes einzelnen Punktes festzulegen, nennt man **zwangläufig**.

Betrachten wir (Fig. 45) das Schema eines Zentrifulregulators mit Punkt A (Schwungkugel) und dem Punkt D (Hülse), indem wir alles andere als geometrische Konfiguration ansehen, so ist zwar die Bewegung von D durch diejenige von A in gewissem Grade beschränkt, aber die Lage beider Punkte ist erst durch die Angabe von zwei un-

abhängigen Parametern bestimmt. Die vollständige Festlegung kann hier geschehen durch den Ausschlagwinkel ϑ der Linie CA und das Azimut der Pendelebene, d. h. den Winkel ψ, welchen sie mit der festen Ebene EOX einschließt. Dieses gebundene System hat also zwei Grade der Bewegungsfreiheit.

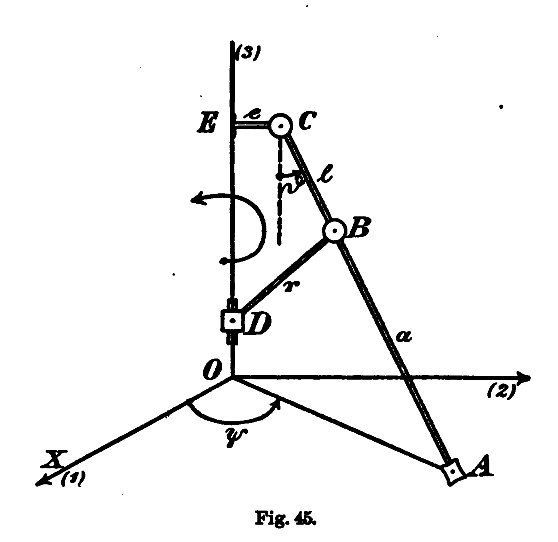


Fig. 45.

73. Einführung des Massenbegriffs. Schon die Vorstellung der Atwoodschen Fallmaschine als eines Systems von zwei diskreten Punkten ist selbst als Fiktion unvollständig, wenn man nicht der Frage näher tritt, ob diese beiden Punkte als geometrische Gebilde durchaus gleichwertig sein sollen, oder ob man ihnen nicht etwas beiordnen müsse, wodurch sie sich für die mechanische Auffassung voneinander unterscheiden. Galilei ging auf diese Frage noch nicht näher ein, aber bereits Huyghens war bei seinen Untersuchungen über die Schwingungsdauer des physischen Pendels gezwungen, den einzelnen Punkten desselben verschiedene Gewichte beizulegen und sie dadurch als materielle Punkte von den geometrischen zu trennen. Aus diesem Pondus-Begriff, der als dynamische Vorstellung damals vollständig geläufig war, entwickelte sich dann all-

mählich der abstraktere Begriff der Masse, wie wir ihn bei Newton vorfinden.

In der Kinematik ist es weder notwendig noch zweckdienlich, auf eine Definition des Massenbegriffs einzugehen. Dies überläßt man besser der Dynamik. Es ist vollständig hinreichend, sich auf den Standpunkt Kirchhoffs*) zu stellen, der in der Masse, welche einem Punkte beizulegen ist, nichts weiteres sieht, als einen Zahlfaktor des Geschwindigkeits- oder Beschleunigungsvektors, der die Beschreibung der Bewegungserscheinungen auf bequeme Weise gestattet. Jedenfalls ist diese Auffassung eine sehr nüchterne und zugleich dem geschichtlichen Entwicklungsgange der Mechanik nicht widersprechende. Die Feststellung einer Masseneinheit und die Methoden, verschiedene Massen zu vergleichen, kann man der Physik überlassen. Diese hat auch zweifellos das Recht, den Newtonschen Massenbegriff gegebenenfalls in irgend einer Weise zu erweitern. Wir betrachten also von jetzt ab, statt der Vektoren $\bar{v}$ und $\bar{w}$, die Produkte $\mu \cdot \bar{v}$ und $\mu \cdot \bar{w}$, worin die positive konstante Zahl μ die Masse des bewegten Punktes ausdrücken soll. Schell**) bezeichnet die Größe $\mu \cdot \bar{w}$ einfach als Massenbeschleunigung. Wir bezeichnen analog $\mu \cdot \bar{v}$ als Massengeschwindigkeit, doch gestatten wir uns häufig, namentlich bei der Entwicklung der kinematischen Systembegriffe, die Masse gar nicht besonders zu erwähnen.

A) Zwangläufige Mechanismen mit gesonderten Massenpunkten.

74. Atwoods Maschine. Man kann hier (Fig. 43) die von den Berührungspunkten mit der Rolle gerechneten Fadenstücke $DA = x_1$ und $EB = x_2$ als Koordinaten der beiden Massenpunkte A und B annehmen. $DA + EB = 2l$ ist dann eine unveränderliche Länge. Es wird also

$$x_1 + x_2 = 2l$$

und daher

$$\frac{dx_1}{d\tau} + \frac{dx_2}{d\tau} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2x_1}{d\tau^2} + \frac{d^2x_2}{d\tau^2} = 0\,.$$

*) Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik § 3.
**) Theorie der Bewegung und der Kräfte. Bd. 2, Kapitel 1.

Infolge des angegebenen Systemzusammenhanges läßt sich sowohl die Geschwindigkeit als auch die Beschleunigung jedes einzelnen Punktes durch einen Parameter ausdrücken. Wir brauchen nur $l - x_1 = x$ zu setzen, so wird $x_2 = l + x$, sowie

$$\frac{dx_1}{d\tau} = -\frac{dx}{d\tau}, \quad \frac{dx_2}{d\tau} = \frac{dx}{d\tau}, \quad \frac{d^2x_1}{d\tau^2} = -\frac{d^2x}{d\tau^2}, \quad \frac{d^2x_2}{d\tau^2} = \frac{d^2x}{d\tau^2}.$$

Eine virtuelle Verrückung des Systems ist vollständig bestimmt, wenn man die virtuelle Änderung der Koordinate x, also δx festlegt. Denn es wird $\delta x_1 = -\delta x$ und $\delta x_2 = \delta x$. Die Gleichung des Zusammenhanges $x_1 + x_2 = 2l$ ist hierbei selbstverständlich gewahrt.

Aus den Massenbeschleunigungen

$$\mu_1 \frac{d^2x_1}{d\tau^2} \quad \text{und} \quad \mu_2 \frac{d^2x_2}{d\tau^2}$$

bilden wir die virtuellen Arbeiten

$$\mu_1 \frac{d^2x_1}{d\tau^2}\,\delta x_1\,, \quad \mu_2 \frac{d^2x_2}{d\tau^2}\,\delta x_2\,,$$

was mit der Definition in Nr. 57 vollständig im Einklang ist, da zwischen den Beschleunigungen und den zugehörigen virtuellen Verschiebungen keine Richtungsunterschiede bestehen.

Die Summe

$$\mu_1 \frac{d^2x_1}{d\tau^2}\,\delta x_1 + \mu_2 \frac{d^2x_2}{d\tau^2}\,\delta x_2$$

ist nun jedenfalls eine Größe, welche sich auf das ganze System bezieht. Sie läßt sich sofort in die folgende Form bringen:

$$\mu_1 \frac{d^2x_1}{d\tau^2} \cdot \delta x_1 + \mu_2 \frac{d^2x_2}{d\tau^2}\,\delta x_2 = (\mu_1 + \mu_2)\frac{d^2x}{d\tau^2} \cdot \delta x\,.$$

Wir deuten nun die rechte Seite dieser Gleichung ebenfalls als die virtuelle Arbeit einer Massenbeschleunigung, indem wir annehmen, sie beziehe sich auf einen Punkt von der Masse $\mu_1 + \mu_2$, der sich mit der Beschleunigung $\frac{d^2x}{d\tau^2}$ geradlinig bewegt.

Der Übergang von den virtuellen Arbeiten zu den Leistungen der in Betracht kommenden Beschleunigungen ergibt:

$$\mu_1 \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} \frac{dx_1}{d\tau} + \mu_2 \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} \frac{dx_2}{d\tau} = (\mu_1 + \mu_2) \frac{d^2 x}{d\tau^2} \frac{dx}{d\tau},$$

oder

$$\frac{d}{d\tau}\left[\tfrac{1}{2}\mu_1 \left(\frac{dx_1}{d\tau}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\mu_2 \left(\frac{dx_2}{d\tau}\right)^2\right] = (\mu_1 + \mu_2) \frac{d^2 x}{d\tau^2} \cdot \frac{dx}{d\tau}.$$

Setzen wir also

$$\tfrac{1}{2}\mu_1 \left(\frac{dx_1}{d\tau}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\mu_2 \left(\frac{dx_2}{d\tau}\right)^2 = \mathsf{E},$$

so ist E eine Systemgröße, welche als Verallgemeinerung der Elementargröße $\frac{1}{2}v^2$, die wir früher als kinetische Energie eines einzelnen Punktes bezeichnet hatten, in unsere Betrachtung eintritt. E läßt sich also einfach als die kinetische Energie des binären Massensystems bezeichnen und es besteht die Beziehung

$$\frac{d\mathsf{E}}{d\tau} = (\mu_1 + \mu_2) \frac{d^2 x}{d\tau^2} \cdot \frac{dx}{d\tau}.$$

Die Leistung des Ersatzpunktes von der Masse $\mu_1 + \mu_2$ und der Beschleunigung $\frac{d^2 x}{d\tau^2}$ ist gleich der auf die Zeiteinheit bezogenen Änderung der kinetischen Energie (E) des Systems.

Man nennt nun im vorliegenden Falle die Größe $(\mu_1 + \mu_2) \frac{d^2 x}{d\tau^2}$ die Beschleunigung des Systems und ist dazu auch durch die folgende Überlegung berechtigt. Verschwindet dieselbe nämlich, so wird nach den bisherigen Definitionen

$$\frac{d\mathsf{E}}{d\tau} = 0, \quad \text{also} \quad \mathsf{E} = \mathsf{E}_0,$$

wenn E_0 den Wert von E für $\tau = 0$ bedeutet.

Die kinetische Energie des Systems bleibt also im Falle des Verschwindens der Systembeschleunigung unverändert. Sie bleibt daher auch dauernd gleich Null, wenn sie anfangs gleich Null war. In diesem Falle wird

also, wenn wir die Geschwindigkeiten der einzelnen Systempunkte mit v_1 und v_2 bezeichnen:

$$\tfrac{1}{2}\mu_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2}\mu_2 v_2^2 = 0 .$$

Diese Größe kann aber — bei der Annahme lediglich positiver Massen — nur verschwinden, wenn

$$v_1 = 0 \quad \text{und} \quad v_2 = 0$$

ist. Das System muß also im Falle des Verschwindens der als Systembeschleunigung definierten Größe $(\mu_1 + \mu_2)\frac{d^2x}{d\tau^2}$ in Ruhe bleiben, wenn es anfangs in Ruhe war.

Betrachtet man die Größe

$$\mathsf{E} = \frac{1}{2}\left[\mu_1\left(\frac{dx_1}{d\tau}\right)^2 + \mu_2\left(\frac{dx_2}{d\tau}\right)^2\right] = \tfrac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)\dot{x}^2$$

als die kinetische Energie eines einzelnen Punktes, so wird

$$\frac{\partial \mathsf{E}}{\partial \dot{x}} = (\mu_1 + \mu_2)\dot{x}, \quad \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathsf{E}}{\partial \dot{x}}\right) = (\mu_1 + \mu_2)\frac{d^2x}{d\tau^2}, \quad \frac{\partial \mathsf{E}}{\partial x} = 0$$

und man erhält

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathsf{E}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathsf{E}}{\partial x} = (\mu_1 + \mu_2)\frac{d^2x}{d\tau^2},$$

also genau die durch Addition der Arbeitsprodukte gewonnene Systembeschleunigung für die Atwoodsche Maschine.

75. Zwangläufige Mechanismen von allgemeiner Konstitution. Aus der Definition der zwangläufigen Systeme folgt unmittelbar, daß bei ihnen die Bahnen aller einzelnen Massenpunkte von vornherein bekannt sind. Wir kennen also für jeden Punkt eine Beziehung in der Parameterform (cf. Nr. 90):

$$\bar{x} = \bar{f}(\vartheta),$$

woraus dann die Geschwindigkeiten der verschiedenen Punkte des Systems

$$\bar{v}_1 = \frac{d\bar{x}_1}{d\tau} = \frac{d\bar{x}_1}{d\vartheta}\cdot\dot{\vartheta}, \quad \bar{v}_2 = \frac{d\bar{x}_2}{d\tau} = \frac{d\bar{x}_2}{d\vartheta}\cdot\dot{\vartheta}, \quad \ldots$$

folgen.

Als die kinetische Energie des ganzen Systems betrachten wir den Summenausdruck

$$\mathbf{E} = \tfrac{1}{2}(\mu_1 v_1^2 + \mu_2 v_2 + \ldots)$$
$$= \frac{1}{2}\left[\mu_1 \left(\frac{d\bar{x}_1}{d\vartheta}\right)^2 + \mu_2 \left(\frac{d\bar{x}_2}{d\vartheta}\right)^2 + \ldots\right] \cdot \left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)^2,$$

oder in abgekürzter Schreibweise

$$\mathbf{E} = \tfrac{1}{2} S \mu v^2 = \tfrac{1}{2} S \mu \left(\frac{d\bar{x}}{d\vartheta}\right)^2 \cdot \left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)^2.$$

Ganz analog wie im vorangehenden speziellen Beispiel bilden wir auch hier die Summe der virtuellen Arbeiten der elementaren Massenbeschleunigungen und erhalten

$$S \mu \bar{w}\, \delta \bar{x} = \delta\vartheta \cdot S \mu \bar{w} \frac{d\bar{x}}{d\vartheta}.$$

Man hat daher allgemein bei Systemen von einem Freiheitsgrad den Ausdruck

$$\mathbf{Q} = S \mu \bar{w} \frac{d\bar{x}}{d\vartheta}$$

als Systembeschleunigung*) zu bezeichnen.

Zwischen der so erhaltenen Systemgröße und der Elementargröße $\mu \bar{w}$ besteht ein prinzipieller Unterschied, welchen der Leser stets im Auge behalten muß. Die elementare Massenbeschleunigung $\mu \bar{w}$ ist nämlich von der Wahl der Koordinate ϑ, welche zur Festlegung der einzelnen Punkte des Mechanismus dient, gänzlich unabhängig. Das trifft aber in bezug auf die oben definierte Systemgröße $\mathbf{Q}$ keineswegs zu. Sie ist vielmehr von dieser Wahl direkt abhängig. Man sollte daher, um etwaige Mißverständnisse zu vermeiden, die durch mangelhafte Beachtung der Voraussetzungen entstehen können, $\mathbf{Q}$ die Systembeschleunigung in bezug auf die Koordinate ϑ nennen. Wir drücken dies auch später meistens durch die Bezeichnung $\mathbf{Q}_\vartheta$ aus. Solche Vorsichtsmaßregeln in der Kinematik der gebundenen Systeme werden natürlich überflüssig, sobald eine genügende Vertrautheit mit den Lagrangeschen Methoden durch mannigfache Übung erlangt ist.

*) Die ausführliche Bezeichnung wäre: Moment der Beschleunigung in bezug auf das System.

Wir wollen nun die elementaren Begleitvektoren

$$\frac{d\bar{x}}{d\vartheta} = \bar{e}$$

einführen und unsere früheren Bezeichnungen für die Elementarbegriffe festhalten. Dann wird die Systemgröße:

$$\mathbf{Q} = S\mu\,\bar{w}\,\bar{e} = S\mu Q = S\mu\left[\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial E}{\partial\dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial E}{\partial\vartheta}\right],$$

wenn Q und E sich auf die einzelnen Punkte des gebundenen Systems beziehen.

Nun ist aber offenbar

$$S\mu E = \mathbf{E}\,.$$

Folglich wird die Systembeschleunigung nach Vertauschung der Summation mit den Differentialquotienten:

$$\mathbf{Q} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\vartheta}\,.$$

Die Lagrangesche Gleichung gibt also ohne weiteres die Systembeschleunigung mit Rücksicht auf die gewählte Koordinate, wenn man die kinetische Energie des ganzen Mechanismus benutzt.

Um den Gang der Rechnung im konkreten Falle zu zeigen, müssen wir noch einige Beispiele zwangläufiger Mechanismen vorführen.

76. Das zusammengesetzte starre Pendel. Auf einem massenlosen Stabe, welcher um den festen Punkt O schwingt, seien zwei Punkte X_1, X_2 mit den Massen μ_1 und μ_2 befestigt. Bezeichnen wir ihre Abstände von O mit a_1 und a_2, so sind die Geschwindigkeiten

$$v_1 = a_1\frac{d\vartheta}{d\tau}, \quad v_2 = a_2\frac{d\vartheta}{d\tau},$$

also die kinetische Energie des Systems:

$$\mathbf{E} = \tfrac{1}{2}(\mu_1 a_1^2 + \mu_2 a_2^2)\cdot\left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)^2.$$

Der hier auftretende Faktor

$$\mu_1 a_1^2 + \mu_2 a_2^2 = \mathbf{T}$$

wird das Trägheitsmoment des Systems in bezug auf den Drehpunkt O genannt.

Beim zusammengesetzten Pendel ist die kinetische Energie des Systems gleich dem halben Produkt aus dem Trägheitsmoment in das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit.

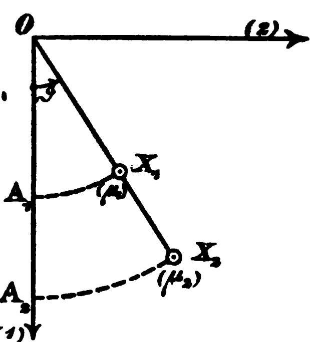


Fig. 46.

Es wird jetzt die Systembeschleunigung in bezug auf die Koordinate ϑ

$$Q_\vartheta = \frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathsf{E}}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial \mathsf{E}}{\partial \vartheta} = \mathsf{T}\frac{d^2\vartheta}{d\tau^2},$$

also gleich dem Produkt aus dem Trägheitsmoment in die Winkelbeschleunigung.

Man sieht sofort, daß der Punkt, im Abstande e mit der Masse $\mu_1 + \mu_2$ belastet, dieselbe Beschleunigung haben würde, wie das ganze System, wenn die Beziehung

$$(\mu_1 + \mu_2)e^2 = \mu_1 a_1^2 + \mu_2 a_2^2$$

bestehen würde. Die so definierte Strecke e wird der ‚Trägheitsradius' des Systems genannt.

77. Der Kurbelmechanismus. Um den festen Punkt O (Fig. 47) rotiert die Strecke $OR = r$ (Kurbelarm), während der Endpunkt von $RL = l$ (Lenkstange) gezwungen ist, auf

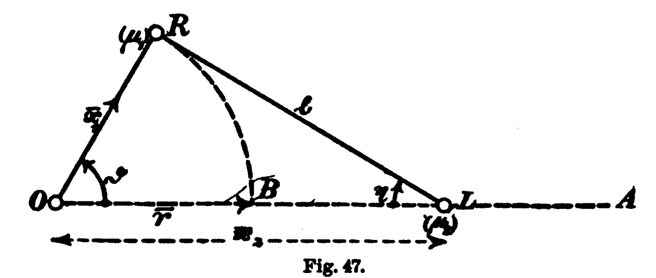


Fig. 47.

der Geraden OA zu gleiten. Als Koordinate wählen wir den Kurbelerhebungswinkel $ROL = \vartheta$. Nur in R (Kurbelzapfen) und L (Kreuzkopfzapfen) seien Massen vom Betrage μ_1 und μ_2 konzentriert. Wir bezeichnen die gerichtete Strecke OR mit $\bar{x}_1$ und OL mit $\bar{x}_2$.

Da der Kurbelzapfen R eine Kreisbahn beschreibt, so ist

$$\bar{x}_1 = \bar{r}\cos\vartheta + \overline{\varepsilon\,\bar{r}}\sin\vartheta\,. \tag{1}$$

Hier bedeutet $\bar{\varepsilon}$ einen Einheitsvektor senkrecht auf der Ebene des Kurbelmechanismus und $\bar{r}$ die Strecke OB von der Länge $\bar{r}$. Die Länge von OL ist nach Fig. 47 offenbar $r\cos\vartheta + l\cos\eta$. Demnach wird

$$\bar{x}_2 = \bar{r}\left(\cos\vartheta + \frac{l}{r}\cos\eta\right). \tag{2}$$

In dem Dreieck ORL ist aber

$$r\sin\vartheta = l\sin\eta\,. \tag{3}$$

Demnach wird auch

$$\bar{x}_2 = \bar{r}\frac{\sin(\vartheta+\eta)}{\sin\eta}, \tag{4}$$

wie man auch durch unmittelbare Anwendung des Sinus-Satzes hätte finden können.

Aus den Gleichungen (1) und (2) erhält man die Geschwindigkeiten

$$\frac{d\bar{x}_1}{d\tau} = [-\bar{r}\sin\vartheta + \overline{\varepsilon\,\bar{r}}\cos\vartheta]\frac{d\vartheta}{d\tau} = \overline{\varepsilon\,\bar{x}_1}\cdot\frac{d\vartheta}{d\tau} \tag{5}$$

und

$$\frac{d\bar{x}_2}{d\tau} = -\bar{r}\left[\sin\vartheta + \frac{l}{r}\sin\eta\cdot\frac{d\eta}{d\vartheta}\right]\frac{d\vartheta}{d\tau}\,. \tag{6}$$

In der letzten Formel tritt außer dem Hilfswinkel η noch der Differentialquotient $\frac{d\eta}{d\vartheta}$ auf. Sein Wert folgt aus der **Konnexgleichung** (3), nämlich

$$\frac{d\eta}{d\vartheta} = \frac{r}{l}\,\frac{\cos\vartheta}{\cos\eta} = \frac{\operatorname{tg}\eta}{\operatorname{tg}\vartheta}\,. \tag{7}$$

Führt man diese Größe in Gleichung (6) ein, so ergibt sich:

$$\frac{d\bar{x}_2}{d\tau} = -\bar{r}\frac{\sin(\vartheta+\eta)}{\cos\eta}\cdot\frac{d\vartheta}{d\tau}\,. \tag{8}$$

Jetzt kann man die kinetische Energie des Systems aufstellen und erhält

$$\mathsf{E} = \tfrac{1}{2}r^2\left[\mu_1 + \mu_2\frac{\sin^2(\vartheta+\eta)}{\cos^2\eta}\right]\left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)^2, \tag{9}$$

einen Ausdruck, in welchem der Hilfswinkel η noch nicht eliminiert ist. Da aber η nach Gleichung (3) für jeden Wert von ϑ bekannt ist und sehr bequem berechnet werden kann, wenn es sich um numerische Ausführungen handelt, so wird man η zuweilen mit Vorteil beibehalten.

Mit Rücksicht auf die Gleichung (7) in Nr. 65 wollen wir nun die sich auf das System beziehende Funktion

$$r^2\left[\mu_1 + \mu_2 \frac{\sin^2(\vartheta + \eta)}{\cos^2\eta}\right] = \mathsf{F} \tag{10}$$

setzen und demnach die kinetische Energie in der Form

$$\mathsf{E} = \tfrac{1}{2}\mathsf{F} \cdot \dot{\vartheta}^2 \tag{11}$$

schreiben.

Jetzt erhält die Systembeschleunigung die Form:

$$\mathsf{Q} = \mathsf{F} \cdot \frac{d^2\vartheta}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\frac{d\mathsf{F}}{d\vartheta} \cdot \left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)^2. \tag{12}$$

In diesem Ausdrucke ist alles bekannt, sobald noch die Winkelgeschwindigkeit des Kurbelarmes $\frac{d\vartheta}{d\tau}$ als Funktion der Zeit τ oder auch des Kurbelwinkels ϑ gegeben ist.

Aufgabe 47. Mit den Zahlangaben $r = 1$, $l = 3$, $\mu_1 = 5$, $\mu_2 = 2$ berechne man für $\vartheta = 0^0$, 15^0, 30^0 usw. den Verlauf der Funktion F aus den Gleichungen (10) und (3). Die erhaltenen Werte sind auf den entsprechenden Richtungen des Kurbelarmes von dem Punkte O aus (Fig. 47) aufzutragen. Auf diese Weise gewinnt man ein Polardiagramm für F, welches den verschiedenen Stellungen des Kurbelarmes entspricht.

78. Unbeschleunigte Bewegung des Kurbelmechanismus. Da die Annahme

$$\mathsf{Q} = 0$$

immer die Beziehung

$$\frac{d\mathsf{E}}{d\tau} = 0$$

nach sich zieht, so erfolgen alle bisher betrachteten unbeschleunigten Bewegungen von Mechanismen mit unveränderlicher kinetischer Energie.

Bei Atwoods Maschine, welche ein sehr einfaches Beispiel darstellt, ist

$$\mathsf{E} = \tfrac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2.$$

Die Energie kann also nur konstant bleiben, wenn $\frac{dx}{d\tau}$ unveränderlich ist. Jeder Massenpunkt des Systems bewegt sich demnach beim Verschwinden der Systembeschleunigung Q mit gleichförmiger Geschwindigkeit weiter. Weniger einfach ist die entsprechende Bewegungsform beim Kurbelmechanismus. Setzen wir hier $\mathsf{Q} = 0$, also nach Gleichung (11)

$$\tfrac{1}{2}\mathsf{F}\cdot\dot{\vartheta}^2 = \mathsf{E}_0\,,$$

wo E_0 der Wert von E für $\vartheta = 0$ sein möge, so folgt für die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\vartheta}{d\tau}$ des Kurbelarmes die Beziehung

$$\mathsf{F}\cdot\dot{\vartheta}^2 = \mathsf{F}_0\cdot\dot{\vartheta}_0^2\,,$$

wo der Index 0 den betreffenden Wert für $\vartheta = 0$ anzeigt.

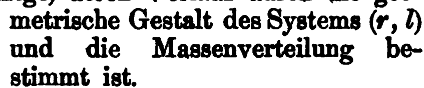
Es wird aber nach Gleichung (10)

$$\mathsf{F}_0 = r^2\cdot\mu_1$$

und daher:

$$\dot{\vartheta} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2\dfrac{\sin^2(\vartheta+\eta)}{\cos^2\eta}}}\cdot\dot{\vartheta}_0\,.$$

Die beschleunigungsfreie Bewegung ist hier — in gewissem Sinne — eine unregelmäßige, deren Verlauf durch die geometrische Gestalt des Systems (r, l) und die Massenverteilung bestimmt ist.



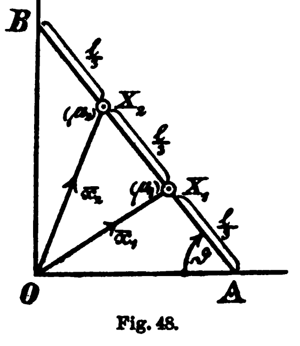


Fig. 48.

Aufgabe 48. Eine geometrische Strecke von der Länge $AB = l$ (Fig. 48) trägt in gleichen Abständen voneinander und von den Enden die Massen μ_1 in X_1 und μ_2 in X_2 und gleitet längs zwei aufeinander senkrechten Achsen. Es sollen die kinetische Energie und die Systembeschleunigung mit Benutzung des Winkels ϑ als Koordinate aufgestellt werden. Nach welchem Gesetze erfolgt die beschleunigungsfreie Bewegung des Systems?

B) Punktverbindungen mit zwei Freiheitsgraden.

79. Die Komponenten der Systembeschleunigung. Bei zwei Freiheitsgraden der Beweglichkeit ist die Lage des Systems durch zwei Koordinaten (Parameter) ϑ_1 und ϑ_2 vollständig bestimmt. Dementsprechend kann die Summe der virtuellen Arbeiten der einzelnen Massenbeschleunigungen in die Form gebracht werden

$$S\mu\overline{w}\,\delta\overline{x} = \mathfrak{Q}_1 \cdot \delta\vartheta_1 + \mathfrak{Q}_2 \cdot \delta\vartheta_2 \,. \tag{1}$$

Man bezeichnet nun die durch diese Gleichung definierten Systemgrößen $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ als die Komponenten der Systembeschleunigung nach den Koordinaten ϑ_1 und ϑ_2. Durch Einführung der kinetischen Energie des Systems

$$\mathsf{E} = S\mu E$$

wird

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{Q}_1 &= \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathsf{E}}{\partial \dot{\vartheta}_1}\right) - \frac{\partial \mathsf{E}}{\partial \vartheta_1} \quad \text{und} \\ \mathfrak{Q}_2 &= \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathsf{E}}{\partial \dot{\vartheta}_2}\right) - \frac{\partial \mathsf{E}}{\partial \vartheta_2} \,. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Die Systembeschleunigung existiert also jetzt lediglich in ihren Komponenten. Von einer Zusammensetzung der letzteren zu einer einheitlichen Systemgröße kann bei dieser Betrachtung keine Rede sein.

Aus der Gleichung (1) folgt sofort

$$\mathfrak{Q}_1 \cdot \frac{d\vartheta_1}{d\tau} + \mathfrak{Q}_2 \cdot \frac{d\vartheta_2}{d\tau} = S\mu\overline{w}\,\overline{v} = \frac{d\mathsf{E}}{d\tau} \,.$$

Das Verschwinden der beiden Komponenten der Systembeschleunigung führt auch hier wieder zu einem von der Zeit unabhängigen Werte der kinetischen Energie. Die Differentialgleichungen

$$\mathfrak{Q}_1 = 0 \,, \quad \mathfrak{Q}_2 = 0$$

bestimmen die beschleunigungsfreie Bewegung, soweit dies ohne Angabe der Anfangswerte von ϑ_1, ϑ_2, $\frac{d\vartheta_1}{d\tau}$ und $\frac{d\vartheta_2}{d\tau}$ möglich ist, aber die Gleichung

$$\mathsf{E} = \mathsf{E}_0$$

reicht allein nicht mehr zur Bestimmung dieser Bewegung aus, wie es bei den zwangsläufigen Mechanismen der Fall war. Sie ist ein **erstes Integral** der Differentialgleichungen $\mathbf{Q}_1 = 0$ und $\mathbf{Q}_2 = 0$.

80. Das ebene Doppelpendel. Bei der Betrachtung der Läutebewegung einer Glocke sind zwei pendelnde Körper miteinander verbunden. Hier wollen wir nur das einfachste ebene System dieser Art behandeln, welches entsteht, wenn ein mathematisches Pendel $X_1 X_2$ (Fig. 49) direkt an dem Massenpunkt X_1 des Pendels OX_1 angeknüpft wird. Wir haben dann, was die Bewegungsform betrifft, dasselbe Bild, welches schon die Astronomen des Altertums zur Erklärung des Planetenlaufs benutzten, nämlich die epizyklische Bewegung. X_2 mit der Masse μ_2 bewegt sich kreisförmig um einen Punkt X_1 mit der Masse μ_1, der selbst in einem Kreise geführt wird. Man hat jetzt mit Benutzung eines auf der Pendelebene senkrecht stehenden Einheitsvektors $\overline{\eta}$ nach den Bezeichnungen der Figur die Bahngleichungen:

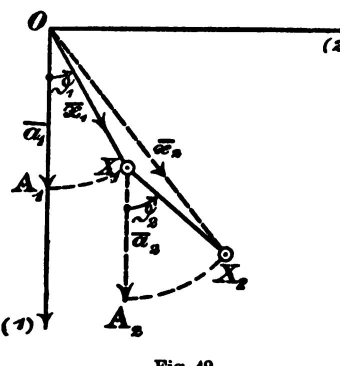


Fig. 49.

$$\overline{x}_1 = \overline{a}_1 \cos\vartheta_1 + \overline{\eta\, a_1} \sin\vartheta_1 ,$$

$$\overline{x_2 - x_1} = \overline{a}_2 \cos\vartheta_2 + \overline{\eta\, a_2} \sin\vartheta_2 .$$

Also sind die Vektoren der in Betracht kommenden Geschwindigkeiten:

$$\overline{v}_1 = \frac{d\overline{x}_1}{d\tau} = \overline{\eta\, x_1} \cdot \frac{d\vartheta_1}{d\tau} ,$$

$$\overline{v}_2 = \frac{d\overline{x}_2}{d\tau} = \overline{\eta\, x_1} \cdot \frac{d\vartheta_1}{d\tau} + \overline{\eta(x_2 - x_1)} \cdot \frac{d\vartheta_2}{d\tau} .$$

Hieraus erhält man

$$v_1^2 = a_1^2 \left(\frac{d\vartheta_1}{d\tau}\right)^2 ,$$

$$v_2^2 = a_1^2 \left(\frac{d\vartheta_1}{d\tau}\right)^2 + 2\, \overline{\eta\, x_1} \cdot \overline{\eta(x_2 - x_1)} \cdot \frac{d\vartheta_1}{d\tau} \frac{d\vartheta_2}{d\tau} + a_2^2 \left(\frac{d\vartheta_2}{d\tau}\right)^2 .$$

Nun ist aber nach der Vertauschungsformel

$$\overline{\eta x_1}\,\overline{\eta(x_2 - x_1)} = \overline{\eta\,\overline{(x_2 - x_1)(\eta x_1)}}$$

oder nach Anwendung der Entwicklungsformel:

$$\overline{\eta x_1}\,\overline{\eta(x_2 - x_1)} = \overline{x_2 - x_1}\cdot \overline{x}_1 = a_1 a_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)\,.$$

Daher wird

$$v_2^2 = a_1^2 \cdot \dot{\vartheta}_1^2 + 2\,a_1 a_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)\,\dot{\vartheta}_1\,\dot{\vartheta}_2 + a_2^2 \cdot \dot{\vartheta}_2^2\,.$$

Jetzt ist die kinetische Energie des ganzen Systems bekannt:

$$\text{(a)}\quad \mathsf{E} = \tfrac{1}{2}[(\mu_1 + \mu_2)a_1^2 \cdot \dot{\vartheta}_1^2 + 2\mu_2 a_1 a_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)\cdot\dot{\vartheta}_1\dot{\vartheta}_2 + \mu_2 a_2^2 \cdot \dot{\vartheta}_2^2]\,.$$

In diesem Ausdrucke wollen wir noch

$$\vartheta_1 = \vartheta \quad\text{und}\quad \vartheta_2 - \vartheta_1 = \psi$$

setzen. Er nimmt dann die Form an:

$$\text{(b)}\quad \begin{cases} \mathsf{E} = \tfrac{1}{2}[\{\mu_1 a_1^2 + \mu_2(a_1^2 + 2\,a_1 a_2 \cos\psi + a_2^2)\}\,\dot{\vartheta}^2 \\ \qquad + 2\,\mu_2 a_2(a_2 + a_1 \cos\psi)\,\dot{\vartheta}\,\dot{\psi} + \mu_2 a_2^2\,\dot{\psi}^2]\,. \end{cases}$$

Wie man sieht, wird durch diese Transformation durchaus keine Vereinfachung erreicht. Dennoch wird die letzte Form der kinetischen Energie benutzt, wenn die relative Bewegung des zweiten Pendels in bezug auf das erste ausgedrückt werden soll.

Wir benutzen jetzt zur expliziten Darstellung der Beschleunigungskomponenten den Ausdruck (a) und erhalten der Reihe nach

$$\mathsf{P}_1 = \frac{\partial \mathsf{E}}{\partial \dot{\vartheta}_1} = (\mu_1 + \mu_2)\,a_1^2 \cdot \dot{\vartheta}_1 + \mu_2 a_1 a_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)\cdot\dot{\vartheta}_2\,,$$

$$\mathsf{P}_2 = \frac{\partial \mathsf{E}}{\partial \dot{\vartheta}_2} = \mu_2 a_1 a_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)\cdot\dot{\vartheta}_1 + \mu_2 a_2^2 \cdot \dot{\vartheta}_2\,,$$

$$\frac{\partial \mathsf{E}}{\partial \vartheta_1} = \mu_2 a_1 a_2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)\cdot\dot{\vartheta}_1\,\dot{\vartheta}_2\,,$$

$$\frac{\partial \mathsf{E}}{\partial \vartheta_2} = -\mu_2 a_1 a_2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)\cdot\dot{\vartheta}_1\,\dot{\vartheta}_2\,.$$

$$\frac{d\mathsf{P}_1}{d\tau} = (\mu_1 + \mu_2)\,a_1^2 \frac{d^2\vartheta_1}{d\tau^2} + \mu_2 a_1 a_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)\frac{d^2\vartheta_2}{d\tau^2}$$
$$- \mu_2 a_1 a_2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_2)\,\dot{\vartheta}_2(\dot{\vartheta}_2 - \dot{\vartheta}_1)\,,$$

$$\frac{d\mathsf{P}_2}{d\tau} = \mu_2 a_2^2 \frac{d^2\vartheta_2}{d\tau^2} + \mu_2 a_1 a_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)\frac{d^2\vartheta_1}{d\tau^2}$$
$$- \mu_2 a_1 a_2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)\,\dot{\vartheta}_1(\dot{\vartheta}_2 - \dot{\vartheta}_1)\,.$$

Die Einsetzung dieser Werte in die Lagrangeschen Gleichungen

$$\mathbf{Q}_1 = \frac{d\mathbf{P}_1}{d\tau} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vartheta_1}, \quad \mathbf{Q}_2 = \frac{d\mathbf{P}_2}{d\tau} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vartheta_2}$$

ergibt nun ohne weiteres die Beschleunigungskomponenten*) in der Form

$$\mathbf{Q}_1 = (\mu_1 + \mu_2)\, a_1^2 \frac{d^2\vartheta_1}{d\tau^2} + \mu_2\, a_1\, a_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) \frac{d^2\vartheta_2}{d\tau^2} - \mu_2\, a_1\, a_2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) \left(\frac{d\vartheta_2}{d\tau}\right)^2,$$

$$\mathbf{Q}_2 = \mu_2\, a_2^2 \frac{d^2\vartheta_2}{d\tau^2} + \mu_2\, a_1\, a_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) \frac{d^2\vartheta_1}{d\tau^2} + \mu_2\, a_1\, a_2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) \left(\frac{d\vartheta_1}{d\tau}\right)^2.$$

Bei der epizyklischen Bewegung im Sinne der Alten wird

$$\mu_1 = 0\,, \quad \mu_2 = \mu\,, \quad \frac{d\vartheta_1}{d\tau} = \omega_1\,, \quad \frac{d\vartheta_2}{d\tau} = \omega_2\,,$$

wobei diese Winkelgeschwindigkeiten ω_1, ω_2 als konstant angesehen werden.

Die Beschleunigungskomponenten sind dann

$$\mathbf{Q}_1 = -\mu\, a_1\, a_2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot \omega_2^2$$

und

$$\mathbf{Q}_2 = +\mu\, a_1\, a_2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot \omega_1^2\,,$$

so daß jetzt alles bekannt ist. Denn aus den Voraussetzungen folgt

$$\vartheta_2 - \vartheta_1 = (\omega_2 - \omega_1)\,\tau + \varepsilon\,,$$

wenn ε eine Konstante ist.

---

*) Wenn auch die vorliegende Entwicklung vom Standpunkte der Kinematik vollständig durchsichtig und in sich abgeschlossen erscheint, so möge doch für den Studierenden der Mechanik bemerkt werden, daß in der Dynamik die Komponenten $\mathbf{Q}_1$ und $\mathbf{Q}_2$ ihrer Größe nach bekannt sind, sobald man die Kräfte kennt, welche die in Betracht gezogene Bewegung hervorbringen. Nennen wir diese dynamischen Komponenten $\mathbf{K}_1$ und $\mathbf{K}_2$, dann folgt durch Integration der Differentialgleichungen

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{K}_1 \quad \text{und} \quad \mathbf{Q}_2 = \mathbf{K}_2$$

mit Berücksichtigung des Bewegungszustandes für $\tau = 0$ der vollständige Verlauf des Bewegungsvorganges.

$\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ sind also in diesem einfachen Falle periodische Funktionen der Zeit, die nach Ablauf des Intervalles

$$\frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$$

wieder zu ihrem früheren Werte zurückkehren.

81. Der Zentrifugalregulator. Wir wollen mit Rücksicht auf spätere Anwendungen die Annahme machen, der Aufhängepunkt E (Fig. 50) des Stabes EX_1, welcher in seinem Endpunkte X_1 die Masse μ_1 (Pendelkugel) trägt, sei nicht in dem Achsenpunkte O, sondern habe von diesem einen

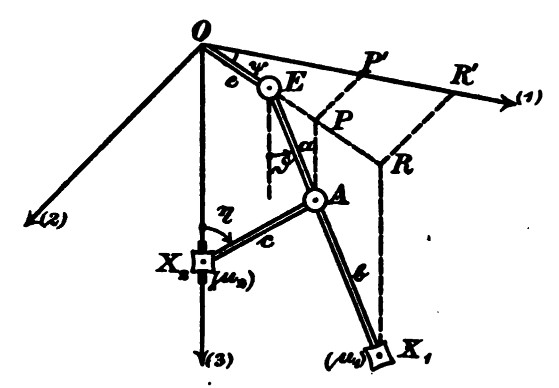


Fig. 50.

horizontalen Abstand $OE = e$. Im Punkte A des Pendelstabes EX_1 sei die Stange $AX_2 = c$ gelenkig eingefügt, die an ihrem Ende die Masse μ_2 (Muffe) trägt, welche sich längs der Vertikalachse *(3)* verschieben kann. Das Azimut der Pendelebene $OEAX_2$ gegen die Richtung O *(1)* sei ψ und der Ausschlagwinkel der Pendelstange EX_1 gegen die Vertikalachse O *(3)* sei ϑ. Die Angaben — mit Einschluß der Längen a und b — genügen, um die rechtwinkligen Koordinaten von X_1, X_2 für jede Lage des Pendels auszudrücken. Wir wollen zunächst den Punkt X_1 ins Auge fassen. Für ihn wird:

$$x_1 = [e + (a + b) \sin\vartheta] \cos\psi\,,$$
$$x_2 = [e + (a + b) \sin\vartheta] \sin\psi\,,$$
$$x_3 = (a + b) \cos\vartheta\,.$$

Setzten wir noch $a + b = l$, so werden die rechtwinkligen Komponenten der Geschwindigkeit der Masse μ_1:

$$\frac{dx_1}{d\tau} = -(e + l\sin\vartheta)\sin\psi\cdot\dot\psi + l\cos\vartheta\cos\psi\cdot\dot\vartheta\,,$$

$$\frac{dx_2}{d\tau} = \quad (e + l\sin\vartheta)\cos\psi\cdot\dot\psi + l\cos\vartheta\sin\psi\cdot\dot\vartheta\,,$$

$$\frac{dx_3}{d\tau} = -l\sin\vartheta\cdot\dot\vartheta\,.$$

Hieraus ergibt sich

$$(1)\qquad \begin{cases} E_1 = \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{dx_1}{d\tau}\right)^2 + \left(\dfrac{dx_2}{d\tau}\right)^2 + \left(\dfrac{dx_3}{d\tau}\right)^2\right] \\ \quad = \frac{1}{2}(e + l\sin\vartheta)^2\cdot\dot\psi^2 + \frac{1}{2}l^2\cdot\dot\vartheta^2\,. \end{cases}$$

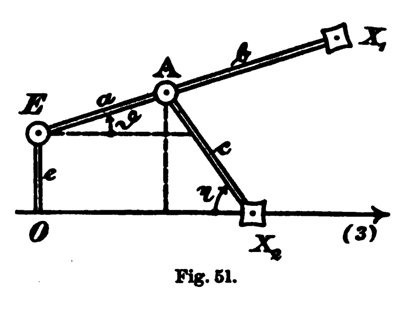


Fig. 51.

Der Massenpunkt X_2 hat nur eine von Null verschiedene rechtwinklige Koordinate OX_2, welche wir mit s bezeichnen wollen. Dann ist offenbar:

(2) $s = a\cdot\cos\vartheta + c\cdot\cos\eta\,.$

Für den Hilfswinkel η ergibt sich nach Fig. 51 die Konnexgleichung:

$$(3)\qquad c\cdot\sin\eta - a\cdot\sin\vartheta = e\,,$$

woraus

$$\sin\eta = \frac{e + a\sin\vartheta}{c}\,,$$

also auch η jederzeit bestimmt werden kann. Ebenso folgt daraus

$$\eta' = \frac{d\eta}{d\vartheta} = \frac{a}{c}\,\frac{\cos\vartheta}{\cos\eta}\,.$$

Aus der Gleichung (2) gewinnt man nun die Muffengeschwindigkeit

$$\frac{ds}{d\tau} = -[a\sin\vartheta + c\sin\eta\cdot\eta']\frac{d\vartheta}{d\tau}$$

und die entsprechende Energie

$$E_2 = \tfrac{1}{2}[a \sin\vartheta + c \sin\eta \cdot \eta']^2 \cdot \dot{\vartheta}^2 = \tfrac{1}{2} a^2 \frac{\sin^2(\vartheta + \eta)}{\cos^2\eta} \cdot \dot{\vartheta}^2 .$$

Die Energie des Systems wird also:

$$(4) \quad \mathbf{E} = \tfrac{1}{2}\mu_1 (e + l \sin\vartheta)^2 \cdot \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}\left[\mu_1 l^2 + \mu_2 a^2 \frac{\sin^2(\vartheta + \eta)}{\cos^2\eta}\right] \cdot \dot{\vartheta}^2 ,$$

woraus sich dann die Beschleunigungskomponenten $\mathbf{Q}_\psi$ und $\mathbf{Q}_\vartheta$ nach den Lagrangeschen Gleichungen

$$\mathbf{Q}_\psi = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \psi} ,$$

$$\mathbf{Q}_\vartheta = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vartheta}$$

ergeben. Die Durchführung der Rechnung wird im allgemeinen Falle recht mühsam. Ein Blick auf die Gleichung (3) zeigt aber, daß für $e = 0$ und $c = a$ eine große Vereinfachung eintritt, indem jetzt $\eta = \vartheta$ wird.

Die Energie des Systems ist in diesem besonderen Falle:

$$\mathbf{E} = \tfrac{1}{2}\mu_1 l^2 \sin^2\vartheta \cdot \dot{\psi}^2 + \tfrac{1}{2}(\mu_1 l^2 + 4\mu_2 a^2 \sin^2\vartheta) \cdot \dot{\vartheta}^2 .$$

Man erhält also zur Bestimmung von $\mathbf{Q}_\psi$ und $\mathbf{Q}_\vartheta$ der Reihe nach:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \dot{\psi}} = \mu_1 l^2 \sin^2\vartheta \cdot \dot{\psi} , \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \dot{\vartheta}} = (\mu_1 l^2 + 4\mu_2 a^2 \sin^2\vartheta) \cdot \dot{\vartheta} ,$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \psi} = 0 , \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vartheta} = \tfrac{1}{2}(\mu_1 l^2 \cdot \dot{\psi}^2 + 4\mu_2 a^2 \cdot \dot{\vartheta}^2) \cdot \sin 2\vartheta .$$

Folglich wird

$$(5) \quad \begin{cases} \mathbf{Q}_\psi = \mu_1 l^2 \sin^2\vartheta \dfrac{d^2\psi}{d\tau^2} + \mu_1 l^2 \sin 2\vartheta \cdot \dfrac{d\vartheta}{d\tau} \cdot \dfrac{d\psi}{d\tau} , \\[2ex] \mathbf{Q}_\vartheta = (\mu_1 l^2 + 4\mu_2 a^2 \sin^2\vartheta) \dfrac{d^2\vartheta}{d\tau^2} + 2\mu_2 a^2 \sin 2\vartheta \cdot \left(\dfrac{d\vartheta}{d\tau}\right)^2 \\[2ex] \qquad\qquad - \tfrac{1}{2}\mu_1 l^2 \sin 2\vartheta \cdot \left(\dfrac{d\psi}{d\tau}\right)^2 . \end{cases}$$

Diese Ausdrücke wollen wir im folgenden — mit Rücksicht auf die Anwendungen in der technischen Mechanik — noch weiter spezialisieren.

82. Kleine Schwingungen eines Zentrifugalregulators. Wir fassen zunächst einen Bewegungszustand ins Auge, welcher durch die Annahme $\dot{\psi} = \omega$ und $\dot{\vartheta} = 0$ bestimmt ist. ω soll eine konstante Größe sein. Die Beschleunigungskomponenten sind dann nach den Gleichungen (5) in Nr. 81:

$$\mathbf{Q}_\psi = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{Q}_\vartheta = -\tfrac{1}{2}\mu_1 l^2 \sin 2\alpha \cdot \omega^2 ,$$

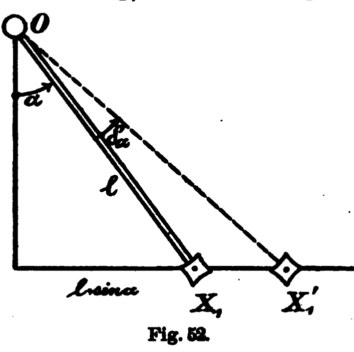


Fig. 52.

wenn α den jetzt unveränderlichen Pendelausschlag bedeutet. Die Bewegung des Punktes X_1 erfolgt in einem festen Kreis vom Radius $l \sin\alpha$, während X_2 in Ruhe bleibt. Schreiben wir nun $\mathbf{Q}_\vartheta$ in der Form

$$\mathbf{Q}_\vartheta = -\mu_1 \cdot l\cos\alpha \cdot l\sin\alpha \cdot \omega^2$$

und die virtuelle Arbeit der Beschleunigung

$$\mathbf{Q}_\vartheta\,\delta\vartheta = -\mu_1\, l\cos\alpha \cdot \delta\alpha \cdot l\sin\alpha \cdot \omega^2$$
$$= -\mu_1\, l\sin\alpha \cdot \omega^2 \cdot \delta(l\sin\alpha)\,,$$

so ist $\delta(l\sin\alpha)$ der virtuelle Weg $X_1 X_1'$ des Punktes X_1 in der Richtung des Radius. Der Faktor $-\mu_1 l\sin\alpha \cdot \omega^2$ ist also die Zentrifugalbeschleunigung ($\mu_1 w_r$) des Punktes X_1 in seiner Kreisbahn.

Wir betrachten jetzt einen Bewegungszustand des Zentrifugalpendels, der von dem eben geschilderten nur sehr wenig abweicht, indem wir

$$\dot{\psi} = \omega + \dot{\sigma} \quad \text{und} \quad \vartheta = \alpha + \varphi$$

setzen. Die veränderlichen Größen $\dot{\sigma}$ und φ mögen stets so klein bleiben, daß man ihre Quadrate und ihre Produkte gegen ihre Werte in der ersten Potenz vernachlässigen kann. Es wird also in den Gleichungen (5) von Nr. 81:

$$\dot{\psi}^2 = \omega^2 + 2\omega\cdot\dot{\sigma}\,, \quad \dot{\psi}\dot{\vartheta} = \omega\cdot\dot{\varphi}$$

und

$$\sin\vartheta = \sin\alpha + \varphi\cdot\cos\alpha\,, \qquad \cos\vartheta = \cos\alpha - \varphi\cdot\sin\alpha\,.$$
$$\sin^2\vartheta = \sin^2\alpha + \varphi\cdot\sin 2\alpha\,, \quad \sin 2\vartheta = \sin 2\alpha + 2\varphi\cdot\cos 2\alpha\,.$$

Mit diesen genäherten Ausdrücken erhält man

$$Q_\varphi = \mu_1 l^2 \sin^2\alpha \frac{d^2\sigma}{d\tau^2} + \mu_1 l^2 \sin 2\alpha\,\omega \cdot \frac{d\varphi}{d\tau}$$

und

$$Q_\sigma = (\mu_1 l^2 + 4\mu_2 a^2 \sin^2\alpha)\frac{d^2\varphi}{d\tau} - \mu_1 l^2 \cos 2\alpha \cdot \omega^2 \cdot \varphi$$

$$- \mu_1 l^2 \sin 2\alpha \cdot \omega \cdot \frac{d\sigma}{d\tau} - \tfrac{1}{2}\mu_1 l^2 \sin 2\alpha \cdot \omega^2 ,$$

wenn man auch die Glieder mit $\varphi \cdot \frac{d^2\varphi}{d\tau^2}$, $\varphi \frac{d\sigma}{d\tau}$ usw. als kleine Größen zweiter Ordnung vernachlässigt.

C) Ebene Stabketten.

83. Geschwindigkeit der Gelenkpunkte. Eine Stabkette entsteht durch fortgesetzte gelenkige Angliederung von Stäben

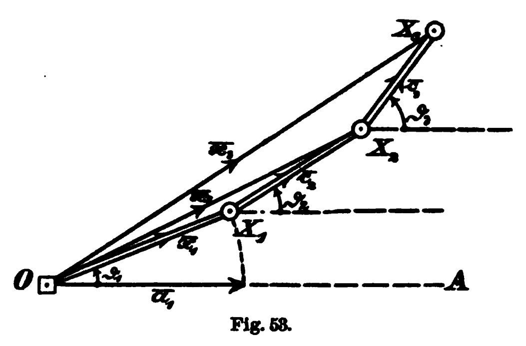


Fig. 53.

in einfacher Reihenfolge. In jedem Gelenkpunkte treffen also nur zwei Stäbe zusammen. Die Gelenke selbst können als Kugelgelenke oder Zylindergelenke ausgebildet sein, ohne daß die Beweglichkeit des Gebildes auf eine Ebene beschränkt ist. An dieser Stelle wollen wir jedoch nur ebene Gelenkketten betrachten und die Raumketten in allgemeiner Auffassung erst im IV. Abschnitte behandeln. Der erste Stab OX_1 von der Länge C_1 (Fig. 53) sei in seinem Anfangspunkte O drehbar befestigt. An ihn schließt sich $X_1 X_2$ von der Länge c_2 und hieran $X_2 X_3$ von der Länge c_3.

Die Neigungswinkel der einzelnen Stäbe, die nur in Endpunkten (Gelenken) Massen (μ_1, μ_2, μ_3) tragen sollen,

wollen wir mit ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 bezeichnen und von der festen Geraden OA aus messen.

Man erkennt aus diesen Festsetzungen, daß es sich hier nur um eine unmittelbare Erweiterung der in Nr. 80 betrachteten Aufgabe des Doppelpendels handelt. Dort trat jedoch die Gesetzmäßigkeit in der Bildung der Systemenergie noch nicht deutlich hervor, da die Untersuchung auf zwei Glieder beschränkt war. Ferner ist zu beachten, daß hier bei Festlegung des Endpunktes der Kette das System seine Beweglichkeit nicht vollständig verliert.

Mit Benutzung des Einheitsvektors $\overline{\eta}$, welcher auf der Ebene der Kettenbewegung senkrecht steht, wird jetzt:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \bar{a}_1 \cdot \cos\vartheta_1 + \overline{\eta\, \bar{a}_1} \cdot \sin\vartheta_1 = \bar{c}_1 \,, \\ \overline{x_2 - x_1} &= \bar{a}_2 \cdot \cos\vartheta_2 + \overline{\eta\, \bar{a}_2} \cdot \sin\vartheta_2 = \bar{c}_2 \,, \\ \overline{x_3 - x_2} &= \bar{a}_3 \cdot \cos\vartheta_3 + \overline{\eta\, \bar{a}_3} \cdot \sin\vartheta_3 = \bar{c}_3 \,, \end{aligned}$$

wo $a_1 = c_1$, $a_2 = c_2$, $a_3 = c_3$ zu nehmen ist. Nach der Definition der Winkel ϑ sind $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ in der festen Richtung OA zu nehmen.

Für die Geschwindigkeiten der Gelenkpunkte ergeben sich nun (wie in Nr. 80) die Ausdrücke

$$(1) \quad \bar{v}_1 = \overline{\eta c_1} \cdot \dot{\vartheta}_1 \,, \qquad \overline{v_2 - v_1} = \overline{\eta c_2} \cdot \dot{\vartheta}_2 \,, \qquad \overline{v_3 - v_2} = \overline{\eta c_3} \cdot \dot{\vartheta}_3$$

und man erkennt ohne weiteres, wie dies auf beliebig viele Glieder auszudehnen ist.

Man hat also der Reihe nach:

$$(2) \quad \begin{cases} \bar{v}_1 = \overline{\eta c_1} \cdot \dot{\vartheta}_1 \\ \bar{v}_2 = \overline{\eta c_1} \cdot \dot{\vartheta}_1 + \overline{\eta c_2} \cdot \dot{\vartheta}_2 \\ \bar{v}_3 = \overline{\eta c_1} \cdot \dot{\vartheta}_1 + \overline{\eta c_2} \cdot \dot{\vartheta}_2 + \overline{\eta c_3} \cdot \dot{\vartheta}_3 \,. \end{cases}$$

84. Kinetische Energie der Kette. Bei der Bildung der Quadrate der Geschwindigkeiten haben wir die Vektorgleichung

$$(1) \quad \overline{\eta c_1} \cdot \overline{\eta c_2} = \overline{c_1 (\eta\, c_2)} \cdot \overline{\eta} = \bar{c}_1\, \bar{c}_2$$

für die verschiedenen Indizes zu berücksichtigen.

Hiernach wird

$$(2) \quad \begin{cases} v_1^2 = c_1^2 \cdot \dot{\vartheta}_1^2 \,, \\ v_2^2 = c_1^2 \cdot \dot{\vartheta}_1^2 + 2 c_1 c_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 + c_2^2 \cdot \dot{\vartheta}_2^2 \,, \\ v_3^2 = c_1^2 \cdot \dot{\vartheta}_1^2 + 2 c_1 c_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 + 2 c_1 c_3 \cos(\vartheta_3 - \vartheta_1) \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_3 \\ \qquad + c_2^2 \dot{\vartheta}_2^2 + 2 c_2 c_3 \cos(\vartheta_3 - \vartheta_2) \dot{\vartheta}_2 \dot{\vartheta}_3 + c_3^2 \cdot \dot{\vartheta}_3^2 \,. \end{cases}$$

Die kinetische Energie des Systems nimmt also die Form an:

$$(3)\quad \begin{cases} \mathbf{E} = \frac{1}{2}[(\mu_1+\mu_2+\mu_3)c_1^2\cdot\dot\vartheta_1^2 + 2(\mu_2+\mu_3)c_1c_2\cos(\vartheta_2-\vartheta_1)\cdot\dot\vartheta_1\dot\vartheta_2 \\ \qquad + 2\mu_3c_1c_3\cdot\cos(\vartheta_3-\vartheta_1)\dot\vartheta_1\dot\vartheta_3 + (\mu_2+\mu_3)c_2^2\cdot\dot\vartheta_2^2 \\ \qquad + 2\mu_3c_2c_3\cos(\vartheta_3-\vartheta_2)\cdot\dot\vartheta_2\dot\vartheta_3 + \mu_3c_3^2\cdot\dot\vartheta_3^2]. \end{cases}$$

Weiter wollen wir die Rechnung nicht führen, da die explizite Bildung der Beschleunigungskomponenten $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{Q}_3$ nach den Lagrangeschen Gleichungen keinerlei Schwierigkeit hat.

85. Bewegung des Balancierkurbelgetriebes. Bisher haben wir die dreigliedrige Kette nach einer Seite hin als völlig frei betrachtet. Die Festlegung des Endpunktes X_3 (Fig. 54) führt zu einem zwangläufigen Mechanismus, der unter Voraussetzung naheliegender Ungleichheitsbedingungen zwischen den Gliedlängen (c_1, c_2, c_3) und der Basis $OX_3 = e$ als Balancierkurbelgetriebe aufgefaßt werden kann. X_2X_3 sei der Balancier, X_1X_2 die Kuppelstange und OX_1 die umlaufende Kurbel.

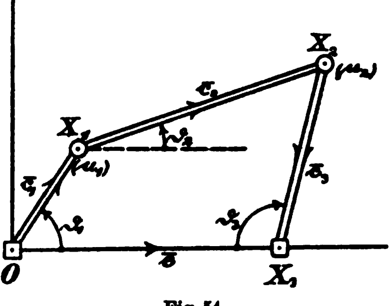


Fig. 54.

Unter diesen Annahmen wird in Gleichung (2) von Nr. 83 $\bar v_3 = 0$, d. h. wenn wir $\dot\vartheta_1 = \omega$ setzen

$$\overline{\eta c_2}\cdot\dot\vartheta_2 + \overline{\eta c_3}\cdot\dot\vartheta_3 = -\overline{\eta c_1}\cdot\omega\,.$$

Hieraus folgt aber sofort

$$\bar c_2\,\overline{\eta c_3}\cdot\dot\vartheta_3 = -\bar c_2\,\overline{\eta c_1}\cdot\omega$$

und

$$\bar c_3\,\overline{\eta c_2}\cdot\dot\vartheta_2 = -\bar c_3\,\overline{\eta c_1}\cdot\omega$$

oder

$$\overline{\eta}\;\overline{c_3 c_2}\cdot\dot\vartheta_3 = -\overline{\eta}\;\overline{c_1 c_2}\cdot\omega$$

$$\overline{\eta}\;\overline{c_2 c_3}\cdot\dot\vartheta_2 = -\overline{\eta}\;\overline{c_1 c_3}\cdot\omega\,,$$

woraus sich

$$\dot\vartheta_3 = -\frac{\sin(\vartheta_2-\vartheta_1)}{\sin(\vartheta_2-\vartheta_3)}\,\frac{c_1}{c_3}\cdot\omega = \frac{\sin(\vartheta_2-\vartheta_1)}{\sin(\vartheta_3-\vartheta_2)}\,\frac{c_1}{c_3}\,\omega$$

$$\dot\vartheta_2 = -\frac{\sin(\vartheta_3-\vartheta_1)}{\sin(\vartheta_3-\vartheta_2)}\cdot\frac{c_1}{c_2}\cdot\omega$$

ergibt. Die kinetische Energie des Systems nimmt jetzt nach Gleichung (3) in Nr. 84 mit Beachtung von $\mu_3 = 0$ die Form an:

$$\mathbf{E} = \tfrac{1}{2}\mathbf{F} \cdot \omega^2 ,$$

wo die Funktion $\mathbf{F}$ aber noch von allen drei Winkeln abhängt. Um ϑ_2 und ϑ_3 durch ϑ_1 auszudrücken, nehmen wir aus Fig. 54 die Polygongleichung

$$\bar{c}_1 + \bar{c}_2 + \bar{c}_3 = \bar{e}$$

und bilden daraus

$$\bar{e}\,\bar{c}_1 + \bar{e}\,\bar{c}_2 + \bar{e}\,\bar{c}_3 = e^2 \quad \text{und} \quad \overline{\bar{e}\bar{c}_1} + \overline{\bar{e}\bar{c}_2} + \overline{\bar{e}\bar{c}_3} = 0 .$$

Dies ergibt die beiden Konnexbedingungen:

$$c_1 \cos\vartheta_1 + c_2 \cos\vartheta_2 + c_3 \cos\vartheta_3 = e$$

$$c_1 \sin\vartheta_1 + c_2 \sin\vartheta_2 + c_3 \sin\vartheta_3 = 0 ,$$

woraus man ϑ_2 und ϑ_3 als Funktionen von ϑ_1 (Kurbelwinkel) entwickeln kann.

Bei den Anwendungen in der Maschinenmechanik erscheint es jedoch meist vorteilhafter, nur einen Winkel (ϑ_2) in $\mathbf{E}$ zu eliminieren und den andern (ϑ_3) als Hilfsgröße bis zu einem bestimmten Punkte der Durchführung beizubehalten. Als Beispiel vergleiche man die Behandlung des Kurbelmechanismus in Nr. 77.

D) Die spannende Beschleunigung bei gebundenen Systemen.

86. Zusammenhang der Elementargrößen mit den Systembegriffen. Zuletzt haben wir uns fast ausschließlich mit den Systemgrößen $\mathbf{Q}$, welche durch die Gleichung:

$$S\mu\bar{w} \cdot \delta\bar{x} = \Sigma\mathbf{Q} \cdot \delta\vartheta \tag{1}$$

definiert sind, beschäftigt. Das Summationszeichen S erstreckt sich hierbei über alle Massenpunkte des Systems, während Σ soviel Summanden andeutet, als Freiheitsgrade vorhanden sind. Diese Unterscheidung wollen wir — bei allgemeinen Betrachtungen — auch in der Folge beibehalten, da sie die Formeln kurz und doch deutlich zu schreiben gestattet.

Setzen wir noch

$$S\mu\bar{v}\cdot\delta\bar{x} = \Sigma \mathsf{P}\cdot\delta\vartheta\,, \tag{2}$$

so nennt man die eingeführten Größen P die **Komponenten der Systemgeschwindigkeit**. Ihr Zusammenhang mit der kinetischen Energie ist durch die Gleichungen

$$\mathsf{P}_\iota = \frac{\partial \mathsf{E}}{\partial \dot{\vartheta}_\iota} \tag{3}$$

gegeben. Dies erkennt man sofort durch Einführung von

$$\delta\bar{x} = \Sigma\bar{e}\cdot\delta\vartheta$$

in Gleichung (2), wodurch man

$$\Sigma \mathsf{P}\,\delta\vartheta = S[\mu\bar{v}\cdot\Sigma\bar{e}\,\delta\vartheta]$$

erhält. Man kann aber hierfür auch

$$\Sigma \mathsf{P}\,\delta\vartheta = \Sigma[\delta\vartheta\cdot S\mu\bar{v}\bar{e}]$$

schreiben. Da aber

$$\mathsf{E} = \tfrac{1}{2}S[\mu\bar{v}\cdot\Sigma\bar{e}\dot{\vartheta}]$$

ist, so wird

$$S\mu\bar{v}\bar{e}_\iota = \frac{\partial \mathsf{E}}{\partial\dot{\vartheta}_\iota} = S\mu P_\iota = \mathsf{P}_\iota\,.$$

Wir wollen nun für die weiteren Betrachtungen annehmen, die Systemgrößen P und Q seien bekannt und auf Grund dieser Voraussetzung die (elementare) Geschwindigkeit und Beschleunigung eines beliebigen Systempunktes, der im allgemeinen kein Massenpunkt zu sein braucht, darstellen.

Seine Geschwindigkeit kann durch eine Gleichung von der Form

$$\bar{v} = \Sigma'\bar{e}'\cdot\dot{\vartheta} \tag{4}$$

ausgedrückt werden. Es ist aber hierbei zu beachten, daß die Summation Σ' sich hier auf weniger Summanden beziehen kann als das System, welchem der Punkt angehört, Freiheitsgrade besitzt. Ein Blick auf die Gleichungen (2) in Nr. 83 zeigt dies sofort, wenn man den jetzt beliebig herausgegriffenen Systempunkt auf der ersten oder zweiten Stange (Fig. 53) liegend annimmt. Ebenso ist klar, daß die Begleitvektoren $\bar{e}'$ vollständig bekannt sind, wenn über die Lage des Punktes im System entschieden ist.

Nach Gleichung (3) sind alle Komponenten (P) der Systemgeschwindigkeit lineäre Funktionen der Parametergeschwindigkeiten ($\dot{\vartheta}$). Mithin läßt sich die Elementargeschwindigkeit unseres Systempunktes auch in der Form

$$\bar{v} = \Sigma' \bar{f}' \cdot \mathsf{P} = \Sigma' \bar{e}' \dot{\vartheta} \tag{5}$$

schreiben. Diese linearen Gleichungen lassen sich umkehren, d. h. es lassen sich die $\dot{\vartheta}$ linear durch die P ausdrücken. Denn die Determinante der vorstehenden linearen Gleichungen ist

$$\left\| \frac{\partial^2 \mathsf{E}}{\partial \dot{\vartheta}_\iota \, \partial \dot{\vartheta}_k} \right\| .$$

Könnte diese Determinante null werden, so müßte in diesem Falle — nach den Sätzen der quadratischen Formen — E verschwinden, ohne daß alle $\dot{\vartheta}$ null wären. Da aber mit E auch alle Elementargeschwindigkeiten $\bar{v}$ verschwinden, so müßte die Beziehung

$$\Sigma \bar{e} \dot{\vartheta}_2 = 0$$

für alle Massenpunkte erfüllt sein, ohne daß alle $\dot{\vartheta}$ null wären. Es gäbe also Veränderungen der ϑ, welche das System in Ruhe ließen, d. h. es wären überflüssige Positionskoordinaten vorhanden. Dies widerspricht aber der Natur dieser Koordinaten in der bisherigen Begriffsfassung. Folglich kann die oben symbolisch angedeutete Determinante nicht verschwinden und die linearen Gleichungen müssen in definiter Form umkehrbar sein.

Die hier eintretenden Vektoren $\bar{f}'$ von der Dimension -1 ergeben sich ohne weiteres durch Ordnen der Glieder in $\bar{v}$ aus den ursprünglichen Begleitvektoren $\bar{e}'$ als Funktionen der Parameter ϑ.

Aus der Gleichung (5) folgt nun durch Differenziieren nach der Zeit τ:

$$\bar{w} = \Sigma \bar{\mathfrak{f}}' \cdot \dot{\mathsf{P}} + \Sigma \dot{\bar{\mathfrak{f}}}' \cdot \mathsf{P} .$$

Hierin ist noch

$$\dot{\bar{\mathfrak{f}}} = \frac{d\bar{\mathfrak{f}}}{d\tau} = \sum \frac{\partial \bar{\mathfrak{f}}}{\partial \vartheta} \cdot \dot{\vartheta}$$

zu setzen und die Parametergeschwindigkeiten $\dot{\vartheta}$ sind wiederum nach Gleichung (3) durch ihre Werte in den P zu ersetzen.

Ferner hat man nach den Lagrangeschen Systemgleichungen

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{Q} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vartheta}.$$

Schreiben wir also $\overline{w}$ in der Form:

$$\overline{w} = \Sigma \overline{\mathfrak{f}}' \cdot \mathbf{Q} + \overline{g}, \tag{6}$$

so ist $\overline{g}$ als eine bekannte Funktion anzusehen, welche natürlich von den Systemkoordinaten ϑ abhängt, aber insbesondere eine homogene quadratische Funktion der Komponenten $\mathbf{P}$ ist. Schreibt man also

$$\overline{g} = \sum_{\iota} \sum_{\nu} \overline{\Gamma}_{\iota\nu} \cdot \mathbf{P}_{\iota} \mathbf{P}_{\nu}, \tag{7}$$

so sind die Koeffizienten $\overline{\Gamma}_{\iota\nu}$ bekannte vektorielle Ausdrücke in den Koordinaten ϑ.

Diesen Sachverhalt wollen wir in dem folgenden allgemeinen Satze zusammenfassen:

> *Beim gebundenen System von beliebig vielen Freiheitsgraden der Beweglichkeit läßt sich die Elementargeschwindigkeit ($\overline{v}$) jedes Punktes — ohne Rücksicht darauf, ob er mit Masse behaftet ist oder nicht — lineär durch die Komponenten der Systemgeschwindigkeit ausdrücken. Die Elementarbeschleunigung ($\overline{w}$) dieses Punktes setzt sich (additiv) zusammen aus einer gleichfalls lineären Funktion der Komponenten der Systembeschleunigung und aus einer homogenen quadratischen Funktion der Komponenten der Systemgeschwindigkeit.*

87. Komponenten der spannenden Beschleunigung eines Systempunktes. Wir haben soeben gesehen, daß die Kenntnis aller Systemgrößen $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ vollständig ausreicht, Elementargeschwindigkeit $\overline{v}$ und Elementarbeschleunigung $\overline{w}$ eines jeden Punktes zu bestimmen, wenn er in dem von vornherein gegebenen Systemzusammenhang festgehalten wird. Betrachten wir aber alle Systempunkte einmal vorübergehend als frei, so ist die Mannigfaltigkeit der Komponenten aller $\overline{v}$ und $\overline{w}$ im allgemeinen größer als die Mannigfaltigkeit der Systemgrößen $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$. Dies tritt bereits für einen Punkt ein, der gezwungen ist, beständig auf einer Fläche zu bleiben. Zerlegen wir in diesem einfachen Falle $\overline{w}$ in zwei Kompo-

nenten $\overline{w}_t$ und $\overline{w}_s$, von denen die erste in der Tangentialebene der Fläche liegt, entsprechend der Gleichung

$$\overline{w} = \overline{w}_t + \overline{w}_s ,$$

so genügt offenbar die treibende Komponente $\overline{w}_t$ vollständig um die $\mathbf{Q}$ zu bestimmen. Die Komponente $\overline{w}_s$ ist ihrerseits vollständig durch die $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ und ϑ bestimmt und trotzdem ohne Einfluß auf die Systemkomponenten $\mathbf{Q}$. Aus diesem Grunde haben wir sie in Nr. 58 und Nr. 70 den spannenden Teil der Elementarbeschleunigung genannt.

Es handelt sich im folgenden darum, die in diesem speziellen Falle früher durchgeführte Bestimmung der spannenden Komponenten $\overline{w}_s$ zu verallgemeinern. Nach der Methode von Lagrange werden wir dieselben genau wie die $\mathbf{Q}$ erhalten, wenn wir uns die Bewegungsmöglichkeit des Systems virtuell erweitert vorstellen und nach Berechnung der dieser Erweiterung entsprechenden Systemkomponenten wieder die ursprünglichen Verbindungen einführen. Wie sich die Durchführung im einzelnen gestaltet, ersieht man am besten aus den nachfolgenden Beispielen.

88. Einführung der spannenden Systembeschleunigung. Die Methode der Energieerweiterung, welche wir bereits in Nr. 70 auf die Kugelbewegung angewendet haben, führt zu sehr fruchtbaren Systembegriffen, welche die spannende Beschleunigung betreffen. Nehmen wir als nächstes und einfachstes Beispiel die Atwoodsche Maschine. Hier ist nach Nr. 74

$$x_1 = l - x , \quad x_2 = l + x .$$

Die virtuelle Erweiterung der Energie soll nun darin bestehen, daß wir den als undehnbar vorausgesetzten Faden von veränderlicher Länge annehmen. Dann wird

$$v_1 = \dot{l} - \dot{x} \quad \text{und} \quad v_2 = \dot{l} + \dot{x} .$$

Folglich

$$\mathbf{E}' = \tfrac{1}{2}[\mu_1(\dot{l} - \dot{x})^2 + \mu_2(\dot{l} + \dot{x})^2] .$$

Die beiden Komponenten der Systembeschleunigung werden also

$$\mathbf{Q}_x = \frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial \dot{x}} = (\mu_2 - \mu_1)\ddot{l} + (\mu_1 + \mu_2)\ddot{x}$$

$$\mathbf{Q}_l = \frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial \dot{l}} = (\mu_1 + \mu_2)\ddot{l} + (\mu_2 - \mu_1)\ddot{x} .$$

Betrachten wir hierin jetzt wieder l als konstant, wie es der Auffassung des ursprünglichen Systems entspricht, so ist

$$\mathfrak{Q}_x = (\mu_1 + \mu_2)\frac{d^2x}{d\tau^2} \quad \text{und} \quad \mathfrak{Q}_l = (\mu_2 - \mu_1)\frac{d^2x}{d\tau^2}.$$

$\mathfrak{Q}_x$ ist selbstverständlich dieselbe Größe, welche wir als Systembeschleunigung bezeichnet haben. Welche kinematische Bedeutung hat aber die neu hinzutretende Systemgröße $\mathfrak{Q}_l$? Die ihr entsprechende virtuelle Arbeit wäre $\mathfrak{Q}_l\,\delta l$. $\mathfrak{Q}_l$ ist also die Systembeschleunigung, welche der virtuellen Verlängerung des Fadens entspricht. Wir betrachten diese Größe als die Spannung des Fadens infolge des Beschleunigungsprozesses, welcher durch $\mathfrak{Q}_x$ bestimmt ist. $\mathfrak{Q}_l$ wird gleich Null für $\mu_2 = \mu_1$.

89. Komponenten der spannenden Systembeschleunigung beim zusammengesetzten Pendel. Wie früher (Nr. 76) wollen

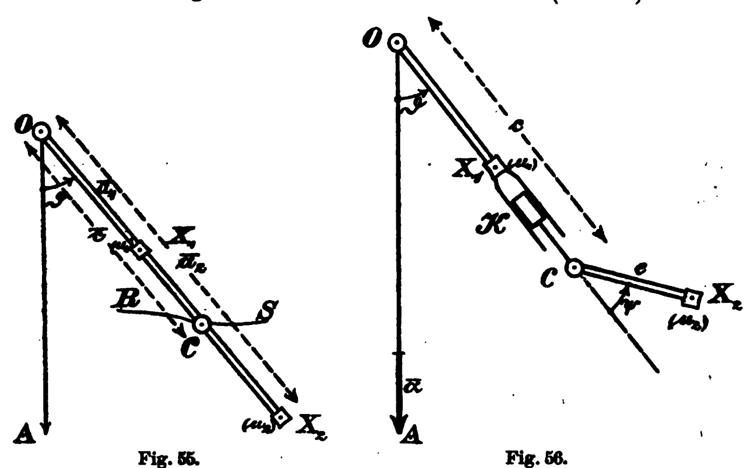


Fig. 55. Fig. 56.

wir auf der an und für sich massenlosen Pendelstange (Fig. 55) zwei Massenpunkte in X_1 und X_2 festlegen. Die Systemerweiterung soll nun in der Weise vorgenommen werden, daß wir zunächst die Entfernung zwischen dem Drehpunkt O und dem Systempunkt C, der zwischen X_1 und X_2 liegen soll, veränderlich werden lassen. Dies kann man sich, wie in Fig. 56 angedeutet, durch eine Kolben- oder Bajonettverbindung realisiert denken. Ferner bringen wir in dem

Punkte C einen Zapfen an, welcher dem Stangenstück $CX_2 = e$ die selbständige Drehung in der Pendelebene erlaubt. Veränderliche sind also jetzt außer dem ursprünglichen Ausschlagwinkel ϑ die Länge $OC = c$ und der Abweichungswinkel ψ des unteren Stangenendes.

Nach diesen Festsetzungen kann man die Gleichung der virtuellen Arbeit der Massenbeschleunigungen in der Form

$$\mu_1 \overline{w}_1 \, \delta \overline{x}_1 + \mu_2 \overline{w}_2 \, \delta \overline{x}_2 = \mathbf{Q}'_\vartheta \cdot \delta\vartheta + \mathbf{q}'_c \cdot \delta c + \mathbf{Q}'_\psi \cdot \delta\psi$$

schreiben. Bezeichnet man noch die ganze kinetische Energie des erweiterten Systems mit $\mathbf{E}'$, so sind die drei Komponenten der Systembeschleunigung auch definiert durch die Lagrangeschen Gleichungen

$$\mathbf{Q}'_\vartheta = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial \dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial \vartheta},$$

$$\mathbf{q}'_c = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial \dot{c}}\right) - \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial c},$$

$$\mathbf{Q}'_\psi = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial \psi}.$$

$\mathbf{Q}'_\vartheta$ geht natürlich für $\dot{c} = 0$, $\psi = 0$ und $\dot{\psi} = 0$ in die Systembeschleunigung des ursprünglichen starren Pendels über. Die beiden anderen Komponenten liefern aber für $\dot{c} = 0$, $\psi = 0$ und $\dot{\psi} = 0$ neue Systemgrößen, welche wir mit $\mathbf{q}_c$ und $\mathbf{Q}_\psi$ bezeichnen wollen. Ihre explizite Bedeutung ergibt sich aus den folgenden Ausführungen.

90. Der vollständige Ausdruck der erweiterten Energie des Pendels. Da der Punkt X_1 einen Kreis um O beschreibt, so ist nach den Bezeichnungen der Figuren 55 und 56 sein Vektor

$$\overline{x}_1 = a_1(\overline{\alpha} \cos\vartheta + \overline{\eta\alpha} \sin\vartheta) = a_1 \overline{\alpha}_1$$

und für den Punkt X_2 hat man

$$\overline{x}_2 = c \cdot \overline{\alpha}_1 + e \cdot \overline{\alpha}_2,$$

wenn

$$\overline{\alpha} \cos(\vartheta + \psi) + \overline{\eta\alpha} \sin(\vartheta + \psi) = \overline{\alpha}_2$$

gesetzt wird. Hieraus ergeben sich die Geschwindigkeiten:

$$\overline{v}_1 = a_1 \cdot \overline{\eta\alpha}_1 \cdot \dot{\vartheta}, \quad \overline{v}_2 = c \cdot \overline{\eta\alpha}_1 \cdot \dot{\vartheta} + \overline{\alpha}_1 \cdot \dot{c} + e \cdot \overline{\eta\alpha}_2 (\dot{\vartheta} + \dot{\psi}).$$

Es wird also
$$v_1^2 = a_1^2 \cdot \dot{\vartheta}^2$$
und
$$v_2^2 = (c^2 + 2ec\cos\psi + e^2)\cdot\dot{\vartheta}^2 + 2e\cdot\overline{\alpha}_1\,\overline{\eta\,\overline{\alpha}_2}\cdot\dot{\vartheta}\dot{c} + 2e(c\cos\psi + e)\cdot\dot{\vartheta}\dot{\psi}$$
$$+ \dot{c}^2 + 2e\overline{\alpha}_1\,\overline{\eta\,\overline{\alpha}_2}\cdot\dot{c}\dot{\psi} + e^2\cdot\dot{\psi}^2,$$
weil
$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1 \quad \text{und} \quad \overline{\alpha}_1\,\overline{\alpha}_2 = \cos\psi$$
ist. Beachtet man noch die Beziehungen
$$\overline{\alpha}_1\,\overline{\eta\,\overline{\alpha}_2} = \overline{\eta}\,\overline{\overline{\alpha}_2\overline{\alpha}_1} = -\sin\psi\,, \quad \overline{\alpha}_2\,\overline{\eta\,\overline{\alpha}_1} = \overline{\eta}\,\overline{\overline{\alpha}_1\overline{\alpha}_2} = \sin\psi\,,$$
so kann man sofort den expliziten Ausdruck für die Systemenergie
$$\mathsf{E}' = \tfrac{1}{2}\mu_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2}\mu_2 v_2^2$$
hinschreiben. Es wird
$$\mathsf{E}' = \tfrac{1}{2}[\{\mu_1 a_1^2 + \mu_2(c^2 + 2ec\cos\psi + e^2)\}\cdot\dot{\vartheta}^2$$
$$+ 2\mu_2 e\sin\psi\cdot\dot{\vartheta}\dot{c} + 2\mu_2 e(c\cos\psi + e)\cdot\dot{\vartheta}\dot{\psi} + \mu_2\dot{c}^2$$
$$+ 2\mu_2 e\sin\psi\cdot\dot{c}\dot{\psi} + \mu_2 e^2\cdot\dot{\psi}^2]\,.$$
Die weitere Rechnung erfolgt jetzt ganz schematisch nach den Lagrangeschen Gleichungen.

91. Dehnungs- und Biegungskomponente der spannenden Systembeschleunigung beim Pendel. Zunächst erhält man aus
$$\frac{\partial\mathsf{E}'}{\partial\dot{c}} = \mu_2 e\sin\psi\cdot\dot{\vartheta} + \mu_2\dot{c} + \mu_2 e\sin\psi\,\dot{\psi}\,,$$
$$\frac{\partial\mathsf{E}'}{\partial\dot{\psi}} = +\mu_2 e(c\cdot\cos\psi + e)\dot{\vartheta} + \mu_2 e\sin\psi\cdot\dot{c} + \mu_2 e^2\cdot\dot{\psi}\,,$$
$$\frac{\partial\mathsf{E}'}{\partial c} = \mu_2(c + e\cos\psi)\cdot\dot{\vartheta}^2 + \mu_2 e\cos\psi\cdot\dot{\vartheta}\dot{\psi}\,,$$
$$\frac{\partial\mathsf{E}'}{\partial\psi} = -\mu_2 ec\sin\psi\cdot\dot{\vartheta}^2 + \mu_2 e\cos\psi\cdot\dot{\vartheta}\dot{c} - \mu_2 ec\sin\psi\cdot\dot{\vartheta}\dot{\psi}$$
$$+ \mu_2 e\cos\psi\cdot\dot{c}\dot{\psi}\,.$$
Diese Größen sind jetzt in die Lagrangeschen Gleichungen einzusetzen, worauf $\dot{c} = 0$, $\psi = 0$ und $\dot{\psi} = 0$ zu nehmen ist. Deuten wir das Resultat dieser Substitutionen durch eine Klammer [ ] an, dann wird
$$\left[\frac{\partial\mathsf{E}'}{\partial c}\right] = \mu_2(c + e)\left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)^2, \qquad \left[\frac{\partial\mathsf{E}'}{\partial\psi}\right] = 0\,,$$
$$\left[\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\mathsf{E}'}{\partial\dot{c}}\right)\right] = 0\,, \qquad \left[\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\mathsf{E}'}{\partial\dot{\psi}}\right)\right] = \mu_2 e(c + e)\frac{d^2\vartheta}{d\tau^2}\,.$$

Folglich sind die Komponenten der spannenden Systembeschleunigung:

$$\mathfrak{q}_c = -\mu_2 a_2 \left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)^2, \quad \mathfrak{Q}_\psi = +\mu_2 a_2 (a_2 - c) \frac{d^2\vartheta}{d\tau^2},$$

da $c + e = a_2$ ist.

Man sieht, daß nur der Bewegungszustand des Punktes X_2 für die Werte dieser Komponenten maßgebend ist. In dem ursprünglichen System hat man für diesen Punkt:

$$\bar{x}_2 = a_2 \cdot \bar{\alpha}_1, \quad \bar{v}_2 = a_2 \overline{\eta \alpha_1} \cdot \dot{\vartheta}$$

und

$$\bar{w}_2 = a_2 \overline{\eta \alpha_1} \cdot \ddot{\vartheta} - a_2 \cdot \bar{\alpha}_1 \cdot \dot{\vartheta}^2.$$

$\mathfrak{q}_c$ ist also der Normalkomponente der Massenbeschleunigung von X_2 gleich, aber entgegengesetzt gerichtet. Aus diesem Grunde können wir $\mathfrak{q}_c$ die Dehnungsspannung der Pendelstange im Punkte C infolge der Beschleunigung nennen.

Nun bilden wir das Moment von $\mu_2 \bar{w}_2$ in bezug auf den Punkt C. Man erhält

$$\mu_2 \cdot \overline{(x_2 - c) w_2} = \mu_2 a_2 (a_2 - c) \frac{d^2\vartheta}{d\tau^2} \cdot \bar{\eta}.$$

$\mathfrak{Q}_\psi$ ist also gleich dem negativen Werte dieses Momentes. Bei der virtuellen Biegung des Stabes wird die Beschleunigungsarbeit

$$\mathfrak{Q}_\psi \cdot \delta\psi$$

hervorgebracht. Wir bezeichnen daher $\mathfrak{Q}_\psi$ als die Biegungskomponente der spannenden Beschleunigung. Bei dieser erweiterten Auffassung der Systembeschleunigung kann man das ursprüngliche $\mathfrak{Q}_\vartheta$ zur Unterscheidung von $\mathfrak{q}_c$ und $\mathfrak{Q}_\psi$ die treibende Beschleunigung des ganzen Systems nennen.

92. Die Lagrangeschen Räume der Bewegungsfreiheit. Betrachtet man die Ausdrücke in Nr. 83 für die Geschwindigkeiten im einfachen ebenen Gelenksystem:

$$\bar{v}_1 = \overline{\eta c_1} \cdot \dot{\vartheta}_1,$$
$$\bar{v}_2 = \overline{\eta c_1} \cdot \dot{\vartheta}_1 + \overline{\eta c_2} \cdot \dot{\vartheta}_2,$$
$$\bar{v}_3 = \overline{\eta c_1} \cdot \dot{\vartheta}_1 + \overline{\eta c_2} \cdot \dot{\vartheta}_2 + \overline{\eta c_3} \cdot \dot{\vartheta}_3,$$

so erkennt man sofort, daß die Zahl der unabhängigen Veränderlichen $(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \ldots)$ bei Vermehrung der Gliederzahl immerfort wächst. $\bar{v}_3$ ist nun zwar ein Vektor in der Ebene, wie jeder andere, er ist zwar für sich durch zwei

unabhängige Größen bestimmt, aber insofern er dem System angehört, wird seine Größe und Richtung durch drei unabhängige Koordinaten bestimmt, wie es bei einem freien Punkte des dreidimensionalen Raumes der Fall ist. Alle möglichen Werte von $\bar{v}_3$ entsprechen daher der Gesamtheit der Punkte einer — wenn auch begrenzten — Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen. Zu jedem Wertesystem der $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ gehört also eine bestimmte Lage des Systempunktes X_3; freilich definiert umgekehrt eine Lage von X_3 noch nicht die $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ vollständig, weil eben X_3 nur eine zweidimensionale Bewegungsfreiheit hat. Für den Punkt X_3 allein wäre daher eine der Koordinaten ϑ überflüssig. Anders wird aber die Sache, wenn wir das ganze System ins Auge fassen; wir können, wie wir sehen werden, die Lagen des Systems und die Mannigfaltigkeit der $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ in eine, wenigstens in einem gewissen Bereiche, ein-eindeutige Beziehung setzen. Denn man erkennt sofort durch geometrische Konstruktion, daß zu jedem Wertesystem der ϑ, für das

$$0 \leqq \vartheta_1 < 2\pi, \quad 0 \leqq \vartheta_2 < 2\pi, \quad 0 \leqq \vartheta_3 < 2\pi$$

ist, eine ganz bestimmte Lage der drei Punkte X gehört; und daß auch umgekehrt, wenn ich die Punkte X alle drei festhalte, eine Änderung der ϑ nicht mehr möglich ist.

Bei dieser Darstellung des Systems durch einen Punkt in der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit der ϑ kann nun auch die kinetische Energie des ganzen Systems, welche durch Gleichung (3) in Nr. 84 gegeben ist, interpretiert werden. Setzen wir

$$\mathsf{E} = \tfrac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2,$$

so kann

$$ds^2 = c_1^2 \cdot d\vartheta_1^2 + 2\frac{\mu_2 + \mu_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3} c_1 c_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)\, d\vartheta_1\, d\vartheta_2$$
$$+ 2\frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3} c_1 c_3 \cos(\vartheta_3 - \vartheta_1)\, d\vartheta_1\, d\vartheta_3 + \frac{\mu_2 + \mu_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3} c_2^2 \cdot d\vartheta_2^2$$
$$+ 2\frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3} c_2 c_3 \cos(\vartheta_3 - \vartheta_2)\, d\vartheta_2\, d\vartheta_3 + \frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3} c_3^2 \cdot d\vartheta_3^2$$

als das Quadrat des Linienelementes in unserer dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit angesehen werden. Jedem Wertsystem $(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$ entspricht ein bestimmter Punkt dieser

Mannigfaltigkeit und eine bestimmte Lage des Gelenksystems. Den aufeinander folgenden Lagen unseres dreigliedrigen Massensystems kann also eine Punktbahn in der durch den Ausdruck für ds^2 charakterisierten Mannigfaltigkeit eindeutig zugeordnet werden und es ist zwischen der Kinematik des Systems und der des Punktes kein Unterschied mehr, wenn man dem Punkte noch die Masse $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ beilegt. Durch die grundlegenden Untersuchungen von Gauß*) und ihre Erweiterung durch Riemann**) ist man imstande, das System der geodätischen Linien und das Krümmungsmaß dieser Mannigfaltigkeit — ganz analog wie bei einer Fläche im gewöhnlichen Raume — durch die Koeffizienten in dem homogenen Ausdruck für ds^2 darzustellen. Aus den Riemannschen Untersuchungen geht hervor, daß die geodätischen Bahnen dieser Mannigfaltigkeit ganz ähnlich, wie auf der zweidimensionalen Fläche im gewöhnlichen Raume durch die Gleichungen $\mathfrak{Q}_1 = 0$, $\mathfrak{Q}_2 = 0$, $\mathfrak{Q}_3 = 0$ gegeben sind. Wir können demnach auch sagen, unser Gelenksystem bewegt sich in einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit von bekannter Krümmung. Lagrange ist derartigen Betrachtungen nicht näher getreten, aber man muß ihm doch jedenfalls das Verdienst zuschreiben, durch die Aufstellung des $\mathfrak{E}$ das effektive Material für dieselben geschaffen zu haben. Aus diesem Grunde wollen wir daher in dem angedeuteten Sinne von einem Lagrangeschen Raume $\mathfrak{R}(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \ldots)$ reden, in welchem der Bewegungsprozeß des materiellen Systems von beliebig vielen Freiheitsgraden verläuft. Seine Charakteristik ist in jedem Falle, wo jede Position des Systems durch unabhängige Parameter $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$ eindeutig bestimmt wird, durch den expliziten Ausdruck der Systemenergie $\mathfrak{E}$ gegeben.

Wird nun — wie wir es bei der Bestimmung der Spannungskomponenten getan haben — die kinetische Energie $\mathfrak{E}$ durch Einführung einer höheren Beweglichkeitsstufe des Systems erweitert, so daß also $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{E}'$ übergeht, dann entspricht diesem Vorgange die Konzeption eines allgemeineren Lagrangeschen Raumes, welchen wir durch das Zeichen

$$\mathfrak{R}'(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \psi_1, \psi_2)$$

andeuten wollen.

---

*) Disquisitions generales circa superficies curvas, deutsch in Ostwalds Klassikerausgaben.

**) Gesammelte Werke 1. Aufl., S. 370—383. Die Darstellung ist in der zweiten Auflage etwas erweitert.

R ist jetzt in **R′** als individuelles Gebilde enthalten. Solange der Mechanismus sich in **R** frei bewegt, kommen keine spannenden Komponenten der Beschleunigung in Betracht. Solange wir nur das Augenmerk auf die freie Beweglichkeit des Mechanismus in **R** richten, liefert **E** nur die Komponenten der treibenden Beschleunigung. Man kann auch sagen, die spannenden Komponenten liefern in **R** keinen Beitrag zur Arbeit der Beschleunigung. Sobald wir aber das System in unserer Vorstellung aus **R** heraustreten lassen, beginnen diese Komponenten ihre Arbeitsleistung und sind, in der oben ausgeführten Weise, durch den Grenzübergang von **E′** zu **E** oder, was hiermit gleichbedeutend ist, durch Rückgang von **R′** zu **R** bestimmbar.

93. Beanspruchung der Bettung eines Kurbelmechanismus durch den Beschleunigungsprozeß. Mit Beibehaltung der bisherigen Voraussetzungen und Bezeichnungen ist für das System in der ursprünglichen Position OX_1X_2:

$$\mathbf{E} = \tfrac{1}{2}\mu_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2}\mu_2 v_2^2 .$$

Erteilen wir nun allen Punkten dieselbe Verschiebung $\bar{c} = OO'$, so wird

$$\bar{x}_1' = \bar{x}_1 + \bar{c}\,, \quad \bar{x}_2' = \bar{x}_2 + \bar{c}\,.$$

Also

$$\bar{v}_1' = \bar{v}_1 + \bar{\dot{c}}\,, \quad \bar{v}_2' = \bar{v}_2 + \bar{\dot{c}}$$

und

$$\mathbf{E}' = \tfrac{1}{2}\mu_1 v_1'^2 + \tfrac{1}{2}\mu_2 v_2'^2 = \mathbf{E} + \tfrac{1}{2}\mu_1(\dot{c}^2 + 2\bar{v}_1\bar{\dot{c}}_1) + \tfrac{1}{2}\mu_2(\dot{c}^2 + 2\bar{v}_2\bar{\dot{c}}_1).$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf die Lagrangeschen Gleichungen:

$$\frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial \dot{c}_1} = (\mu_1 + \mu_2)\dot{c}_1 + \mu_1\bar{v}_1\bar{\alpha} + \mu_2\bar{v}_2\bar{\alpha}\,,$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial \dot{c}_2} = (\mu_1 + \mu_2)\dot{c}_2 + \mu_1\bar{v}_1\bar{\beta} + \mu_2\bar{v}_2\bar{\beta}\,,$$

weil nach Einführung der aufeinander senkrechten Einheitsvektoren $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ (Fig. 57)

$$\bar{\dot{c}} = \dot{c}_1 \cdot \bar{\alpha} + \dot{c}_2 \cdot \bar{\beta}\,, \quad \text{also} \quad \dot{c}^2 = \dot{c}_1^2 + \dot{c}_2^2$$

wird. Folglich wird

$$\mathfrak{q}_1 = \left[\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial \dot{c}_1}\right) - \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial c_1}\right]_{\dot{c}_1=0,\ \dot{c}_2=0,\ c_1=0,\ c_2=0} = \mu_1 \overline{w}_1 \overline{\alpha} + \mu_2 \overline{w}_2 \overline{\alpha}\,,$$

$$\mathfrak{q}_2 = \left[\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial \dot{c}_2}\right) - \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial c_2}\right]_{\dot{c}_1=0,\ \dot{c}_2=0,\ c_1=0,\ c_2=0} = \mu_1 \overline{w}_1 \overline{\beta} + \mu_2 \overline{w}_2 \overline{\beta}\,.$$

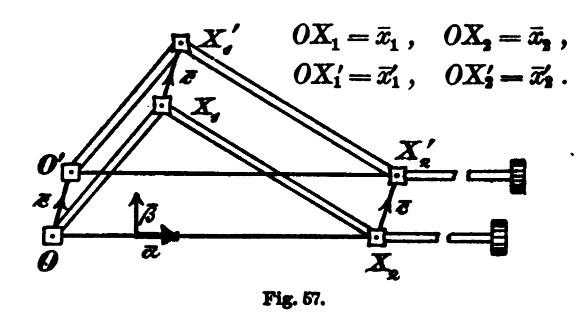


Fig. 57.

Setzen wir also noch

$$\mathfrak{q}_1 \cdot \overline{\alpha} + \mathfrak{q}_2 \cdot \overline{\beta} = \overline{\mathfrak{q}}\,,$$

so wird der Vektor der spannenden Beschleunigung

$$\overline{\mathfrak{q}} = \mu_1 \cdot \overline{w}_1 + \mu_2 \cdot \overline{w}_2\,.$$

Die Bedeutung dieses Resultates werden wir erst in Nr. 95 erklären.

94. Virtuelle Arbeit der spannenden Beschleunigungskomponenten. Bei Systemen mit wenigen diskreten Massenpunkten ist es oft einfacher, zur Bestimmung der spannenden Beschleunigungen unmittelbar mit den Elementarbeschleunigungen dieser Punkte zu rechnen und damit auf die Lagrangeschen Gleichungen zu verzichten. Nehmen wir wieder einen zwangsläufigen Mechanismus mit zwei Massenpunkten $X_1(\mu_1)$, $X_2(\mu_2)$ vor, so sind die Positionen dieser Punkte definiert durch Gleichungen von der Form

$$\overline{x}_1 = \overline{f}_1(\vartheta)\,, \quad \overline{x}_2 = \overline{f}_2(\vartheta)\,.$$

Statt dessen kann man, weil es zuweilen bequemer ist, zwei Gleichungen mit zwei Parametern (ϑ, ψ) geben:

$$\bar{x}_1 = \bar{f}_1(\vartheta, \psi), \quad \bar{x}_2 = \bar{f}_2(\vartheta, \psi)$$

und eine Konnexbedingung

$$F(\vartheta, \psi) = 0$$

hinzufügen.

Dieses System bewege sich in dem Lagrangeschen Raume $R(\vartheta)$. Wir erweitern denselben durch Einführung von drei neuen Veränderlichen ψ', c_1, c_2, wodurch die neuen Lagen der Massenpunkte X_1, X_2 jetzt die folgende Darstellung erhalten:

$$\bar{x}_1' = \bar{f}_1'(\vartheta, \psi', c_1, c_2), \quad \bar{x}_2' = \bar{f}_2'(\vartheta, \psi', c_1, c_2)$$

mit der erweiterten Konnexgleichung

$$F'(\vartheta, \psi', c_1, c_2) = 0,$$

welche für $\psi' = \psi$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ in die ursprüngliche übergehen soll. Selbstverständlich werden bei der Erweiterung der Beweglichkeit des Systems auch die Elementarbeschleunigungen $\bar{w}_1$, $\bar{w}_2$ der beiden Massenpunkte andere, welche wir mit $\bar{w}_1'$, $\bar{w}_2'$ bezeichnen wollen. Es handelt sich jetzt darum, in dem Lagrangeschen Raume $R'(\vartheta, c_1, c_2)$ die virtuelle Arbeit

$$\mu_1 \bar{w}_1' \delta \bar{x}_1' + \mu_2 \bar{w}_2' \delta \bar{x}_2' = \delta A'$$

zu bilden.

Nun ist aber, wenn das Zeichen $\mathfrak{d}$ partielle Differentiationen nach allen vier Variabeln ϑ, ψ', c_1, c_2 anzeigen soll,

$$\delta \bar{x}_1' = \frac{\mathfrak{d} \bar{x}_1'}{\mathfrak{d} \vartheta} \delta \vartheta + \frac{\mathfrak{d} \bar{x}_1'}{\mathfrak{d} \psi'} \delta \psi' + \frac{\mathfrak{d} \bar{x}_1'}{\mathfrak{d} c_1} \delta c_1 + \frac{\mathfrak{d} \bar{x}_1'}{\mathfrak{d} c_2} \mathfrak{d} c_2,$$

$$\delta \bar{x}_2' = \frac{\mathfrak{d} \bar{x}_2'}{\mathfrak{d} \vartheta} \delta \vartheta + \frac{\mathfrak{d} \bar{x}_2'}{\mathfrak{d} \psi'} \delta \psi' + \frac{\mathfrak{d} \bar{x}_2'}{\mathfrak{d} c_1} \delta c_1 + \frac{\mathfrak{d} \bar{x}_2'}{\mathfrak{d} c_2} \mathfrak{d} c_2$$

und die Konnexgleichung ergibt

$$\frac{\mathfrak{d} F'}{\mathfrak{d} \vartheta} \delta \vartheta + \frac{\mathfrak{d} F'}{\mathfrak{d} \psi'} \delta \psi' + \frac{\mathfrak{d} F'}{\mathfrak{d} c_1} \mathfrak{d} c_1 + \frac{\mathfrak{d} F'}{\mathfrak{d} c_2} \delta c_2 = 0.$$

Hieraus erhält man in abgekürzter Schreibweise:

$$\delta \psi' = -\frac{F_\vartheta' \delta \vartheta + F_1' \delta c_1 + F_2' \delta c_2}{F_{\psi'}'}.$$

Die totale virtuelle Arbeit des erweiterten Systems wird also:

$$\delta A' = \left\{ \mu_1 \overline{w}_1' \left(\frac{\mathfrak{d} \overline{x}_1'}{\mathfrak{d} \vartheta} - \frac{F_\vartheta'}{F_{\psi'}'} \frac{\mathfrak{d} \overline{x}_1'}{\mathfrak{d} \psi'} \right) + \mu_2 \overline{w}_2' \left(\frac{\mathfrak{d} \overline{x}_2'}{\mathfrak{d} \vartheta} - \frac{F_\vartheta'}{F_{\psi'}'} \frac{\mathfrak{d} \overline{x}_2'}{\mathfrak{d} \psi'} \right) \right\} \delta \vartheta$$

$$+ \left\{ \mu_1 \overline{w}_1' \left(\frac{\mathfrak{d} \overline{x}_1'}{\mathfrak{d} c_1} - \frac{F_1'}{F_{\psi'}'} \frac{\mathfrak{d} \overline{x}_1'}{\mathfrak{d} \psi'} \right) + \mu_2 \overline{w}_2' \left(\frac{\mathfrak{d} \overline{x}_2'}{\mathfrak{d} c_1} - \frac{F_1'}{F_{\psi'}'} \frac{\mathfrak{d} \overline{x}_2'}{\mathfrak{d} \psi'} \right) \right\} \delta c_1$$

$$+ \left\{ \mu_1 \overline{w}_1' \left(\frac{\mathfrak{d} \overline{x}_1'}{\mathfrak{d} c_2} - \frac{F_2'}{F_{\psi'}'} \frac{\mathfrak{d} \overline{x}_1'}{\mathfrak{d} \psi'} \right) + \mu_2 \overline{w}_2' \left(\frac{\mathfrak{d} \overline{x}_2'}{\mathfrak{d} c_2} - \frac{F_2'}{F_{\psi'}'} \frac{\mathfrak{d} \overline{x}_2'}{\mathfrak{d} \psi'} \right) \right\} \delta c_2$$

$$= \mathfrak{Q}_\vartheta' \delta \vartheta + \mathfrak{q}_1' \delta c_1 + \mathfrak{q}_2' \delta c_2 .$$

Macht man nun in den Systemgrößen $\mathfrak{q}_1'$, $\mathfrak{q}_2'$ den Grenzübergang mit $\psi' = \psi$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, so sind die resultierenden Größen $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$ die Komponenten der spannenden Beschleunigung, welche der willkürlich ausgeführten Systemerweiterung entsprechen. Natürlich stimmen die so erhaltenen $\mathfrak{q}$ genau mit denen überein, die durch eine entsprechende Erweiterung der kinetischen Energie gewonnen werden. Der Gang der Rechnung soll im folgenden an zwei Beispielen im einzelnen dargelegt werden.

95. Spannende Beanspruchung des Wellenlagers eines einfachen Kurbelmechanismus durch den Beschleunigungsprozeß. Die vorhergehende etwas allgemein gehaltene Darstellung ist schon auf den konkreten Fall des Kurbelmechanismus mit zwei Massenpunkten zugeschnitten. Wir wollen (Fig. 58) die Wellenmitte O nach O' rücken, so daß $OO' = \overline{c}$ wird, während sich X_2 im Kreuzkopflager nach X_2' verschiebt. Mit Benutzung der Einheitsvektoren:

$$\overline{\varrho} = \overline{\alpha} \cos \vartheta + \overline{\eta \alpha} \sin \vartheta$$
$$\overline{\lambda}' = \overline{\alpha} \cos \psi' - \overline{\eta \alpha} \sin \psi'$$

erhält man zur Ortsbestimmung der Punkte X_1', X_2' die Ausdrücke

$$\overline{x}_1' = \overline{c} + r \overline{\varrho}, \quad \overline{x}_2' = \overline{c} + r \overline{\varrho} + l \cdot \overline{\lambda}',$$

wozu noch die Konnexbedingung

$$c_2 + r \sin \vartheta - l \sin \psi = 0$$

tritt, welche ausdrückt, daß X_2' in der Parallelführung bleibt. Die weitere Ausführung der Rechnung ist jetzt sehr einfach. Denn man hat für die virtuellen Verschiebungen sofort die

Ausdrücke

$$\delta \bar{x}_1' = \delta \bar{c} + r \cdot \overline{\eta \varrho} \cdot \delta \vartheta$$

$$\delta \bar{x}_2' = \delta \bar{c} + r \cdot \overline{\eta \varrho} \cdot \delta \vartheta - l \cdot \overline{\eta \lambda'} \cdot \delta \psi'$$

und aus der Konnexgleichung folgt

$$\delta \psi' = \frac{\delta c_2 + r \cos \vartheta \cdot \delta \vartheta}{l \cos \psi'} .$$

Demnach erhält man für die totale virtuelle Arbeit

$$\mu_1 \overline{w}_1' \delta \bar{x}_1' + \mu_2 \overline{w}_2' \delta \bar{x}_2' = \mu_1 \overline{w}_1' (\delta \bar{c} + r \cdot \overline{\eta \varrho} \cdot \delta \vartheta) + \mu_2 \overline{w}_2' (\delta \bar{c} + r \cdot \overline{\eta \varrho} \cdot \delta \vartheta - l \cdot \overline{\eta \lambda'} \cdot \delta \psi') ,$$

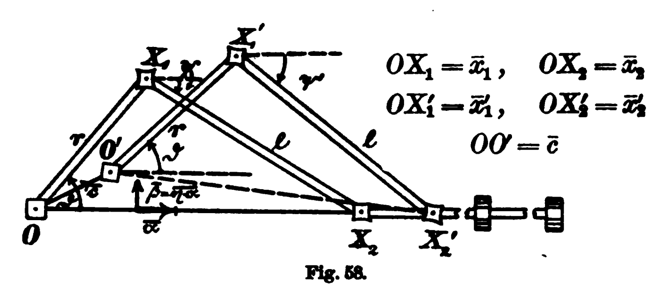


Fig. 58.

oder wenn man noch

$$\delta \bar{c} = \bar{\alpha} \cdot \delta c_1 + \bar{\beta} \cdot \delta c_2$$

setzt:

$$\sum \mu \overline{w}' \delta \bar{x}' = \mathfrak{Q}_\vartheta' \delta \vartheta + (\mu_1 \overline{w}_1' \bar{\alpha} + \mu_2 \overline{w}_2' \bar{\alpha}) \delta c_1 + \left(\mu_1 \overline{w}_1' \bar{\beta} + \mu_2 \overline{w}_2' \beta - \frac{\mu_2}{\cos \psi'} \cdot \overline{\eta \lambda'} \, \overline{w}_2' \right) \delta c_2 .$$

Nun ist aber

$$\overline{\eta \lambda'} \, \overline{w}_2' = w_2' \cdot \sin \psi' ,$$

da auch $\overline{w}_2'$ horizontal liegt.

Der Grenzübergang mit $\psi' = \psi$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ ergibt ohne weitere Rechnung die spannenden Beschleunigungskomponenten in der übersichtlichen Form:

$$\mathfrak{q}_1 = \mu_1 \overline{w}_1 \bar{\alpha} + \mu_2 w_2 ,$$

$$\mathfrak{q}_2 = \mu_1 \overline{w}_1 \bar{\beta} - \mu_2 \operatorname{tg} \psi \cdot w_2 .$$

Nach Nr. 77 hat man

$$\overline{w}_1\,\overline{\alpha} = -\frac{d}{d\tau}\left(r\sin\vartheta\,\frac{d\vartheta}{d\tau}\right),$$

$$\overline{w}_1\,\overline{\beta} = +\frac{d}{d\tau}\left(r\cos\vartheta\,\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)$$

und

$$w_2 = -\frac{d}{d\tau}\left(r\,\frac{\sin(\vartheta+\psi)}{\cos\psi}\,\frac{d\vartheta}{d\tau}\right).$$

Folglich wird auch

$$\mathfrak{q}_1 = -\mu_1\frac{d}{d\tau}\left(r\sin\vartheta\cdot\frac{d\vartheta}{d\vartheta}\right) - \mu_2\frac{d}{d\tau}\left(r\,\frac{\sin(\vartheta+\psi)}{\cos\psi}\,\frac{d\vartheta}{d\tau}\right),$$

$$\mathfrak{q}_2 = +\mu_1\frac{d}{d\tau}\left(r\cos\vartheta\,\frac{d\vartheta}{d\tau}\right) + \mu_2\operatorname{tg}\psi\,\frac{d}{d\tau}\left(r\,\frac{\sin(\vartheta+\psi)}{\cos\psi}\,\frac{d\vartheta}{d\tau}\right).$$

Ganz dieselben Ausdrücke gewinnt man mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen aus der erweiterten Energie

$$\mathbf{E}' = \tfrac{1}{2}(\mu_1+\mu_2)\left[\dot c_1^2 + \dot c_2^2 + 2r(\dot c_1\cos\vartheta - \dot c_2\sin\vartheta)\,\dot\vartheta + r^2\dot\vartheta^2\right]$$
$$+ \tfrac{1}{2}\mu_2\, l\left[l\cdot\dot\psi' - 2(\dot c_1\sin\psi' + \dot c_2\cos\psi') - 2r\dot\vartheta\cos(\vartheta+\psi')\right]\cdot\dot\psi',$$

welche nach Elimination von $\dot\psi'$ die Form

$$\mathbf{E}' = \tfrac{1}{2}(\mu_1+\mu_2)\left[\dot c_1^2 + \dot c_2^2 + 2r(\dot c_1\cos\vartheta - \dot c_2\sin\vartheta)\,\dot\vartheta + r^2\dot\vartheta^2\right]$$
$$+ \tfrac{1}{2}\mu_2\left[\frac{r\cos\vartheta\cdot\dot\vartheta + \dot c_2}{\cos\psi'} - 2(\dot c_1\sin\psi' + \dot c_2\cos\psi')\right.$$
$$\left. - 2r\dot\vartheta\cos(\vartheta+\psi')\right]\frac{r\cos\vartheta\cdot\dot\vartheta + \dot c_2}{\cos\psi'}$$

annimmt.

Im gegenwärtigen Falle ist die Verwendung der Elementarvektoren $\overline{w}_1$, $\overline{w}_2$ sicher einfacher und kürzer als die Aufstellung und Benutzung von $\mathbf{E}'$. Bei den später zu betrachtenden Mechanismen mit stetiger Massenverteilung kommen beide Methoden annähernd auf dasselbe Maß von Arbeit hinaus.

Unser Problem unterscheidet sich von dem in Nr. 93 behandelten dadurch, daß dort die kinematische Reaktion auf das ganze Bett bestimmt wurde, während hier nur die Reaktion auf das Wellenlager in Betracht kam.

96. Kinematische Beanspruchung der Kreuzkopfführung. Wir geben der Kreuzkopfmasse μ_2 die Verschiebung $X_2 X_2'$ (Fig. 59). Der Abstand der neuen Lage X_2' von der Geraden durch OK sei b. Folglich ist jetzt die Konnexbedingung

$$r \sin\vartheta - l \sin\psi' - b = 0 ,$$

woraus

$$\delta\psi' = \frac{r\cos\vartheta \cdot \delta\vartheta - \delta b}{l\cos\psi'}$$

folgt.

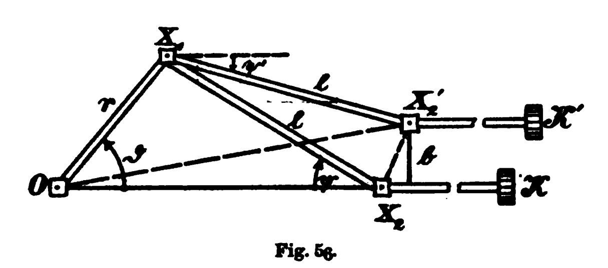


Fig. 59.

Setzen wir also

$$\mu_1 \overline{w}_1' \delta\overline{x}_1' + \mu_2 \overline{w}_2' \delta\overline{x}_2' = \mathfrak{Q}' \delta\vartheta + \mathfrak{q}_b' \cdot \delta b ,$$

so ergibt der Grenzübergang mit $\psi' = \psi$, $b = 0$ sofort

$$\mathfrak{q}_b = +\mu_2 \operatorname{tg}\psi \cdot w_2 = -\mu_2 \operatorname{tg}\psi \cdot \frac{d}{d\tau}\left[\frac{r\sin(\vartheta+\psi)}{\cos\psi}\frac{d\vartheta}{d\tau}\right].$$

Die Beanspruchung der Kreuzkopfführung hängt also von der Masse im Kurbelzapfen gar nicht ab.

Aufgabe 49. Man zeige, daß $\mathfrak{q}_b$ für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = 180°$ verschwindet. Für welchen Wert von ϑ wird $\mathfrak{q}_b$ ein Maximum?

III. Abschnitt.

Kinematik des starren Körpers.

97. Der starre Körper als mechanisches System. Bisher haben wir uns ausschließlich mit der Bewegung von Punkten beschäftigt. Die Vorstellung einer Mannigfaltigkeit von Punkten, die derartig miteinander verbunden sind, daß die gegenseitigen Abstände dauernd unveränderlich sind, kann als Grundlage für eine Kinematik des starren Systems betrachtet werden. Wir ziehen es jedoch vor, auf die in der Geometrie geläufige Anschauung eines beweglichen Raumes in seiner Beziehung zu einem als ruhend gedachten Raume zurückzugehen. Ob der feste Bezugsraum auch tatsächlich der absolut ruhende Raum ist, hat für die Entwicklung der kinematischen Sätze keine aktuelle Bedeutung, weshalb Erörterungen in dieser Richtung der „Dynamik" vorbehalten bleiben können.

Wir wollen uns die Vorstellung des starren Körpers zunächst durch Abgrenzung des beweglichen Raumes bilden, den wir in beliebig vielen Exemplaren vorhanden annehmen. Dann setzen wir fest, daß jeder Punkt des abgegrenzten Raumes Träger einer Masse sein soll. Auf die Stetigkeit der Massenverteilung brauchen wir kein besonderes Gewicht zu legen. Dagegen ist es für die meisten Betrachtungen wesentlich, daß die Summe der Massen aller Punkte des starren Körpers als eine endliche Größe betrachtet wird.

Bei den zunächst folgenden Untersuchungen über die endlichen Bewegungen des starren Systems bleibt der Massenbegriff ganz außer Betracht.

A) Getrennte Positionen eines starren Körpers.

98. Geometrie der Bewegung. Schon aus der oben entwickelten Vorstellung des starren Körpers geht hervor, daß dieselbe eine wesentlich geometrische ist. Ob die Physik die reale Existenz solcher Gebilde anerkennen will oder nicht, ist ganz ihre Sache. Jedenfalls hat die bisherige Entwicklung der Mechanik gezeigt, daß sie ein solches System gebraucht und es ist ihr auch gelungen, veränderliche (deformierbare) Systeme, wie elastische feste Körper, Flüssigkeiten als gesetzmäßige Verbindungen unendlich kleiner starrer Körper aufzufassen und auf diese Weise Bewegungsformen zu entdecken, denen sich die Veränderungen wirklicher Körper innerhalb der Grenzen unserer Beobachtungsfehler genügend anschließen.

Das ursprünglichste Merkmal des starren Körpers ist seine Lage (Position) im ruhenden Raume. Es entsteht deshalb zunächst die Frage, wie der Übergang des Körpers aus einer Position (A) in eine beliebige zweite Position (A') erfolgen kann. Nun sieht man ohne weiteres ein, daß dies auf unendlich verschiedene Weise möglich ist. Die Geometrie zeigt aber, wie dieser Übergang eindeutig durch eine vollständig definierte Bewegungsform zustande kommen kann. Untersuchungen über derartige Bewegungen bilden den Gegenstand der „Geometrie der Bewegung“, die namentlich durch D'Alembert und Euler begründet wurde und heute zu einer selbständigen Wissenschaft*) ausgewachsen ist. Wir bringen im folgenden nur die wichtigsten Sätze gleichsam als eine geometrische Einleitung und Übersicht für die Untersuchungen, welche in den folgenden Kapiteln enthalten sind.

99. Schiebung oder Translation. Geht das starre System aus der Lage (A) in eine zweite Lage (A') derart (Fig. 60) über, daß alle Punkte geradlinige Wege ($\bar{a}$) von gleicher Richtung und gleicher Länge durchlaufen, so nennt man

*) Ampère ist nicht als Begründer der Kinematik anzusehen, obwohl wir ihm die Benennung dieses Zweiges der Mechanik und eine Abgrenzung desselben verdanken. Essai sur la philosophie. Paris 1834. Die von ihm gegebenen Anregungen haben sich namentlich für die geometrische Ausbildung der Kinematik fruchtbringend erwiesen.

die so festgelegte Bewegungsform eine Schiebung oder Translation des Systems.

Bezeichnen wir also die Vektoren der Punkte $X, Y, \ldots$ in der ersten Lage mit $\bar{x}, \bar{y}, \ldots$ und die auf demselben Anfangspunkte O bezogenen Vektoren in der zweiten Lage mit $\bar{x}', \bar{y}', \ldots$, so ist

$$\bar{x}' = \bar{x} + \bar{a}, \quad \bar{y}' = \bar{y} + \bar{a}, \quad \ldots$$

wenn $\bar{a}$ die Translationsstrecke ist.

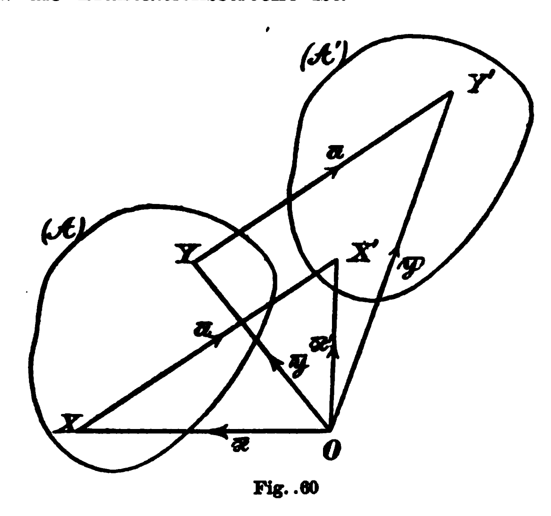


Fig. 60

Eine auf die erste folgende Translation um den Betrag $\bar{b}$ bringe den Körper in die Position (A''). Dieser Bewegung entsprechen die Gleichungen

$$\bar{x}'' = \bar{x}' + \bar{b}, \quad \bar{y}'' = \bar{y}' + \bar{b}, \quad \ldots$$

Nun ist aber auch

$$\bar{x}'' = \bar{x} + \bar{a} + \bar{b}, \quad \bar{y}'' = \bar{y} + \bar{a} + \bar{b}, \quad \ldots$$

Die Translation $\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$ führt also den Körper unmittelbar aus der Lage (A) in die Lage (A'') und ist daher im Ergebnis den beiden Translationen $\bar{a}, \bar{b}$ geometrisch äquivalent.

100. Drehung (Rotation) um eine feste Achse. Wir betrachten als zweite elementare Bewegungsform eines starren Körpers diejenige, bei welcher alle Punkte Bogen beschreiben,

die Kreisen von parallelen Ebenen angehören und bezeichnen sie als Drehung oder Rotation des Systems. Sie erfolgt um eine Achse, die durch den Vektor $(\vartheta \cdot \overline{\eta})$ des Drehwinkels bestimmt ist. Die Größe dieses Winkels heißt die Amplitude der Rotation. Betrachten wir $\overline{\eta}$ als Einheitsvektor senkrecht auf der Ebene von Fig. 61, so ist

$$(1)\qquad \begin{cases} \overline{x'} = \overline{x} \cdot \cos\vartheta + \overline{\eta\,x} \cdot \sin\vartheta\,, \\ \overline{y'} = \overline{y} \cdot \cos\vartheta + \overline{\eta\,y} \cdot \sin\vartheta\,, \quad \ldots \end{cases}$$

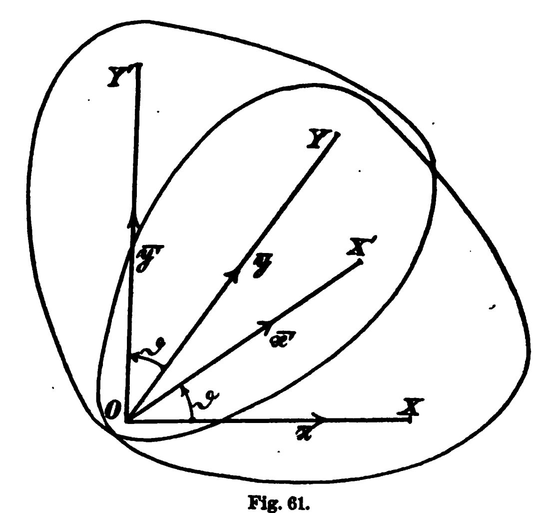


Fig. 61.

für die Ortsänderung der Punkte X, Y, ... des Systems. Hieraus folgt

$$\Delta\overline{x} = \overline{x' - x} = -2\sin^2\frac{\vartheta}{2} \cdot \overline{x} + \sin\vartheta \cdot \overline{\eta\,x}$$

oder

$$(2)\qquad \Delta\overline{x} = 2\sin\frac{\vartheta}{2}\left[\cos\frac{\vartheta}{2} \cdot \overline{\eta\,x} - \sin\frac{\vartheta}{2} \cdot \overline{x}\right]$$

für die Ortsänderung des Punktes X infolge der Rotation.

101. Einführung des Rotationsvektors. In der Gleichung (2) kann man statt des Einheitsvektors $\overline{\eta}$ einen andern durch die Relation

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} \cdot \overline{\eta} = \overline{\lambda}$$

einführen. Jetzt ist

$$\cos^2\frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{1+\lambda^2}, \quad \sin^2\frac{\vartheta}{2} = \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}.$$

Folglich wird $\Delta\bar{x}$ rational in λ, nämlich:

$$(3) \qquad \Delta\bar{x} = \frac{2}{1+\lambda^2}\left[\overline{\lambda x} - \lambda^2\cdot\bar{x}\right].$$

102. Der Vektor der Sehnenmitte. Alle Rotationsgleichungen vereinfachen sich ganz bedeutend, wenn man nach dem Vorgange Eulers statt $\bar{x}$ die Größe $\bar{x} + \frac{1}{2}\Delta\bar{x}$ benutzt, also statt $\bar{x}$ die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks einführt, dessen Basis die Sehne des Bogenweges ist. Jetzt wird

$$\frac{\frac{1}{2}|\Delta\bar{x}|}{|x + \frac{1}{2}\Delta x|} = \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}$$

und wegen der Bedeutung des Momentproduktes

$$\tfrac{1}{2}\Delta\bar{x} = \overline{\lambda(x + \tfrac{1}{2}\Delta x)}.$$

Setzt man noch

$$\bar{x} + \tfrac{1}{2}\Delta\bar{x} = \bar{r},$$

so hat man für den Effekt der Rotation die Eulersche Formel:

$$(4) \qquad \Delta\bar{x} = 2\cdot\overline{\lambda r}.$$

Aus dieser folgt natürlich auch wieder die Gleichung (3). Denn es ist

$$\Delta\bar{x} - \overline{\lambda\cdot\Delta x} = 2\,\overline{\lambda x}$$

und

$$\overline{\lambda\cdot\Delta x} - \overline{\lambda(\lambda\cdot\Delta x)} = 2\,\overline{\lambda(\lambda x)},$$

d. h.

$$\Delta\bar{x} = 2\,\overline{\lambda x} - \lambda^2\cdot\Delta\bar{x} = -2\,\lambda^2\cdot\bar{x}$$

oder

$$\Delta\bar{x} = \frac{2}{1+\lambda^2}[\overline{\lambda x} - \lambda^2\cdot\bar{x}].$$

103. Parallelverschiebung der Rotationsachse. Bisher hatten wir den Bezugspunkt des ortsbestimmenden Vektors $\bar{x}$ in die Rotationsachse gelegt. Wählt man hierzu einen beliebigen

anderen Punkt O' der Ebene, so daß $\overline{O'O} = \bar{c}$ wird, so ist

$$\overline{x' - c} = \overline{x - c} \cdot \cos\vartheta + \overline{\eta(x - c)} \cdot \sin\vartheta$$

und

$$\overline{x' - x} = \Delta\bar{x} = 2\sin\frac{\vartheta}{2}\left[\cos\frac{\vartheta}{2} \cdot \overline{\eta(x - c)} - \sin\frac{\vartheta}{2} \cdot \overline{x - c}\right].$$

Die Gleichung (3) wird also jetzt durch die folgende ersetzt:

$$\Delta\bar{x} = \frac{2}{1 + \lambda^2}[\overline{\lambda(x - c)} - \lambda^2 \cdot \overline{x - c}]. \tag{4a}$$

Hieraus folgt die Identität:

$$\frac{2}{1+\lambda^2}[\overline{\lambda(x - c)} - \lambda^2 \cdot \overline{x - c}] = \frac{2}{1+\lambda^2}[\overline{\lambda x} - \lambda^2 \cdot \bar{x} - (\overline{\lambda c} - \lambda^2 \cdot \bar{c})].$$

Die linke Seite stellt eine Rotation um eine durch $\bar{c}$ und $\bar{\eta}$ bestimmte Achse dar, die rechte Seite läßt sich auffassen als das Resultat einer Rotation um den Nullpunkt und einer darauffolgenden Translation vom Betrage

$$\frac{2}{1 + \lambda^2}[\lambda^2 \cdot \bar{c} - \overline{\lambda c}] = \bar{a}.$$

Wir drücken jetzt $\bar{c}$ durch $\bar{a}$ aus, indem wir

$$\frac{2}{1 + \lambda^2}[\lambda^2 \cdot \overline{\lambda c} - \overline{\lambda(\lambda c)}] = \overline{\lambda a}$$

bilden. Man hat also

$$\frac{2}{1 + \lambda^2}[\lambda^2 \cdot \overline{\lambda c} + \lambda^2 \cdot \bar{c}] = \overline{\lambda a},$$

$$\frac{2}{1 + \lambda^2}[-\lambda^2 \cdot \overline{\lambda c} + \lambda^4 \cdot \bar{c}] = \lambda^2 \cdot \bar{a}.$$

Folglich

$$2\lambda^2 \cdot \bar{c} = \lambda^2 \cdot \bar{a} + \overline{\lambda a}$$

oder wegen

$$\bar{\lambda} = \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} \cdot \bar{\eta}$$

$$\bar{c} = \tfrac{1}{2}\bar{a} + \tfrac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2} \cdot \overline{\eta a}.$$

„Die Folge einer Translation um die Strecke $\bar{a}$ und einer Rotation von der Amplitude ϑ um eine zur Richtung der Translation senkrechte Achse ist äquivalent einer Rotation gleicher Amplitude um eine parallele Achse. Die neue Achse bildet mit der ersten und einer zu ihr parallelen Geraden durch den Endpunkt der Translationsstrecke ein gleichschenkliges Dreikant, dessen Winkel am Scheitel gleich ϑ ist."

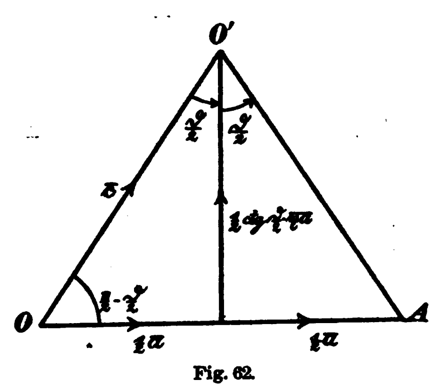


Fig. 62.

Die Winkel an der Basis ($\bar{a}$) sind also gleich $\frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta}{2}$ (Fig. 62).

Nach diesem Satze kann man den Einfluß der Parallelverschiebung einer Rotationsachse beurteilen.

104. Rotation um eine beliebig im Raume orientierte Achse. Auf der Drehachse (Fig. 63) nehmen wir einen beliebigen Punkt C an und beziehen ihn, wie alle andern Punkte, auf einen willkürlich gewählten Punkt O. Infolge der Rotation gehe nun der Punkt X des Systems in X' über. M sei die Sehnenmitte, $\overline{MS} = -\bar{a}$ senkrecht auf der Drehachse $\bar{\eta}$. Aus dem Dreieck SXM folgt (cf. Nr. 102):

$$\tfrac{1}{2}\Delta\bar{x} = \overline{\lambda a} = \overline{\lambda m}\,.$$

In dem Dreieck OMC ist aber $\bar{m} = \overline{r - c}$. Also

$$\Delta\bar{x} = 2 \cdot \overline{\lambda(r - c)}\,, \tag{5}$$

worin

$$\bar{r} = \bar{x} + \tfrac{1}{2}\Delta\bar{x}$$

zu nehmen ist. Aus Gleichung (5) bilden wir

$$\overline{\lambda\cdot\Delta x} = \overline{\lambda(\lambda\cdot\Delta x)} + 2\,\overline{\lambda[\lambda(x-c)]}$$

oder

$$\overline{\lambda\cdot\Delta x} = -\lambda^2\cdot\overline{\Delta x} + 2\,\overline{\lambda[\lambda(x-c)]}\,.$$

Mithin wird

$$\Delta\bar{x} = \frac{2}{1+\lambda^2}\left[\overline{\lambda(x-c)} + \overline{\lambda[\lambda(x-c)]}\right]. \tag{6}$$

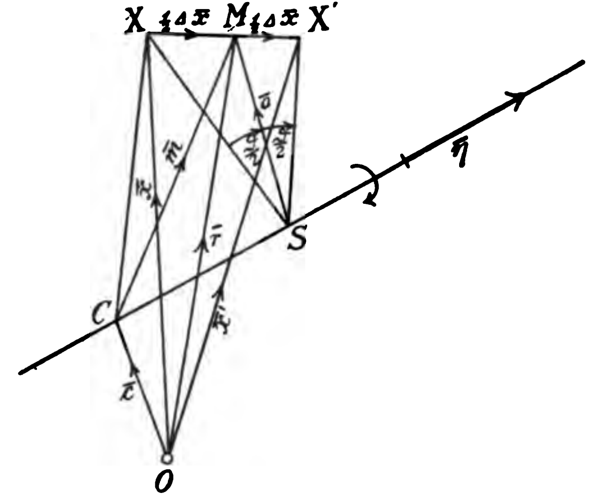


Fig. 68.

Die Gleichung (4a) in Nr. 103 ist ein besonderer Fall dieser allgemeinen Formel, bei welcher $\bar{\lambda}$ nicht mehr senkrecht auf $\overline{x-c}$ zu stehen braucht.

105. Schraubenbewegung (Schraubung). Aus den beiden elementaren Bewegungsformen: Schiebung und Drehung leitet man eine dritte ab, indem man dieselben aufeinander folgen läßt und der Schiebung die Richtung der Drehachse gibt. Daß die Reiheufolge der Elementarbewegung für die Endlage des Körpers gleichgültig ist, sieht man ohne weiteres ein. Die ganze Änderung $\Delta\bar{x}$ läßt durch die Formel

$$\Delta\bar{x} = p\cdot\bar{\eta} + \frac{2}{1+\lambda^2}\left[\overline{\lambda(x-c)} + \overline{\lambda[\lambda(x-c)]}\right] \tag{7}$$

ausdrücken.

In der Auffassung, daß beide Grundbewegungen gleichzeitig erfolgen, wird die neue Bewegung bei proportionaler Änderung der zurückgelegten Translationsstrecke mit der Amplitude der Rotation identisch mit der Bewegung der Mutter auf einer Schraubenspindel. Man bezeichnet sie deshalb auch unmittelbar als „Schraubung".

p heißt der „Parameter" der Schraubung. Er steht mit der Ganghöhe (h) der Schraube in der einfachen Beziehung

$$p = \frac{h}{2\pi} \cdot \vartheta .$$

106. Zentralachse für eine endliche Lagenänderung. Es handelt sich jetzt darum, zu zeigen, daß die Folge einer beliebigen Translation ($\bar{a}$) und einer beliebigen Rotation ($\bar{\lambda}$) durch eine bestimmte Schraubung ersetzt werden kann. Hierzu verwenden wir die Gleichung

$$\Delta \bar{x} = \bar{a} + \frac{2}{1+\lambda^2}\left[\overline{\lambda(x-c)} + \overline{\lambda[\lambda(x-c)]}\right]$$

und bringen sie auf die Form:

$$\Delta \bar{x} = \bar{a} + \frac{2}{1+\lambda^2}\left[\overline{\lambda(c'-c)} + \overline{\lambda[\lambda(c'-c)]}\right]$$
$$+ \frac{2}{1+\lambda^2}\left[\overline{\lambda(x-c')} + \overline{\lambda[\lambda(x-c')]}\right].$$

Das dritte Glied stellt jetzt eine Rotation um eine zur ursprünglichen parallele Achse dar, welche (Fig. 64) durch den Punkt C' geht. Sollen nun die beiden ersten Glieder die Translation einer zugehörigen Schraubung bedeuten, so muß

$$\bar{a} + \frac{2}{1+\lambda^2}\left[\overline{\lambda e} + \overline{\lambda(\lambda e)}\right] = p \cdot \bar{\eta} \tag{8}$$

sein. Zur Bestimmung des Parameters p folgt sofort

$$\bar{a}\bar{\eta} = p . \tag{9}$$

Er ist also die Projektion der Translationsstrecke auf die Drehachse. Aus Gleichung (8) folgt nun weiter

$$\overline{\lambda a} + \frac{2}{1+\lambda^2}\left[(\bar{\lambda}\bar{e}) \cdot \bar{\lambda} - \lambda^2 \cdot \bar{e} - \lambda^2 \cdot \overline{\lambda e}\right] = 0$$

und

$$\overline{\lambda(\lambda a)} + \frac{2}{1+\lambda^2}\left[-\lambda^2(\bar{\lambda}\bar{e})\cdot\bar{\lambda} + \lambda^4\cdot\bar{e} - \lambda^2\cdot\overline{\lambda e}\right] = 0\,.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man sofort:

$$\overline{\lambda a} - \overline{\lambda(\lambda a)} - 2\lambda^2\cdot\bar{e} + (\bar{\lambda}\bar{e})\cdot\bar{\lambda} = 0$$

und darauf

$$\overline{\lambda(\lambda a)} + \lambda^2\cdot\overline{\lambda a} - 2\lambda^2\cdot\overline{\lambda e} = 0\,.$$

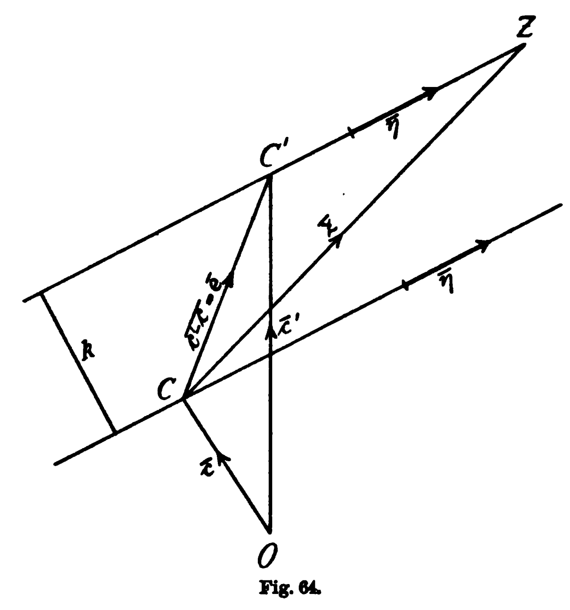


Fig. 64.

Setzt man also

$$\overline{\lambda a} + \lambda^2\cdot\bar{a} = 2\lambda\cdot\bar{h}\,, \tag{10}$$

so wird

$$\overline{\lambda(e-h)} = 0 \tag{11}$$

die Gleichung einer Geraden parallel der ursprünglichen Rotationsachse, die durch den bestimmten Punkt $\bar{h}$ geht. Diese Gerade, auf welcher man den Punkt C' beliebig annehmen kann, heißt die „Zentralachse“ der vorausgesetzten Bewegung. Sie ist die Achse der äquivalenten Schraubung, die nun vollständig bestimmt ist.

11*

Aus Gleichungen (10) und (11) kann man noch den senkrechten Abstand der beiden Achsen nach Nr. 22 berechnen.

107. Das Achsenkreuz im bewegten Körper. Im ruhenden Raume nehmen wir vom Punkte O ausgehend ein rechtwinkliges Achsenkreuz an und bezeichnen die Richtungen der drei Achsen durch die Einheitsvektoren $\bar{\varepsilon}_1\,\bar{\varepsilon}_2\,\bar{\varepsilon}_3$. Ein starrer Körper sei nun derart beweglich, daß einer seiner Punkte beständig mit O zusammenfällt. In der Anfangslage

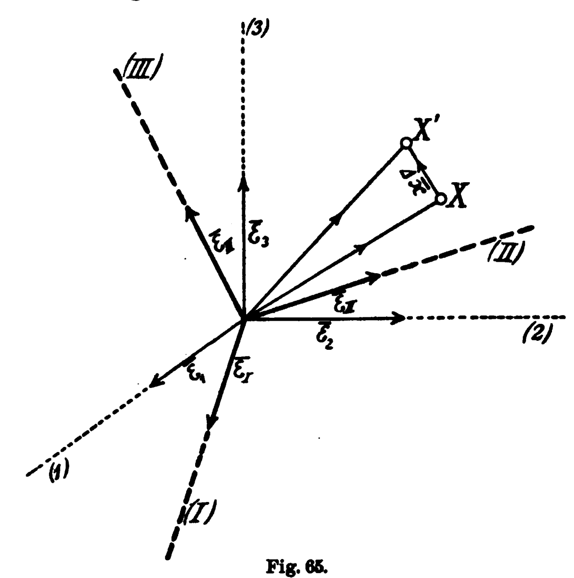


Fig. 65.

decken sich die Vektoren $\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_2$, $\bar{\varepsilon}_3$ (Fig. 65) mit gewissen Einheitsvektoren $\bar{\varepsilon}_I$, $\bar{\varepsilon}_{II}$, $\bar{\varepsilon}_{III}$, welche dauernd mit dem Körper fest verbunden sein sollen. Sie bestimmen ein neues Achsenkreuz, welches sich gegen das erste bewegt. Jeder Position der drei Strecken $\bar{\varepsilon}_I$, $\bar{\varepsilon}_{II}$, $\bar{\varepsilon}_{III}$ in bezug auf den festen Raum entspricht also auch eine bestimmte Lage des Körpers. Wegen der vorausgesetzten Rechtwinkligkeit müssen jedoch immer die Beziehungen

$$(12)\qquad \bar{\varepsilon}_{II}\bar{\varepsilon}_{III} = 0\,,\quad \bar{\varepsilon}_{III}\bar{\varepsilon}_I = 0\,,\quad \bar{\varepsilon}_I\bar{\varepsilon}_{II} = 0\,,$$

$$(13)\qquad \overline{\varepsilon_{II}\varepsilon_{III}} = \bar{\varepsilon}_I\,,\quad \overline{\varepsilon_{III}\varepsilon_I} = \bar{\varepsilon}_{II}\,,\quad \overline{\varepsilon_I\varepsilon_{II}} = \bar{\varepsilon}_{III}$$

erfüllt sein.

Ferner muß

$$\bar{\varepsilon}_I^2 = 1\,, \quad \bar{\varepsilon}_{II}^2 = 1\,, \quad \bar{\varepsilon}_{III}^2 = 1 \tag{14}$$

sein. Wir setzen nun fest, daß das Vektorsystem $\bar{\varepsilon}_I$, $\bar{\varepsilon}_{II}$, $\bar{\varepsilon}_{III}$ einer beliebig gewählten Anfangsposition des Körpers entspreche, daß also die Werte $\bar{\varepsilon}_I$, $\bar{\varepsilon}_{II}$, $\bar{\varepsilon}_{III}$ fixiert werden, nachdem die ursprüngliche Decklage bereits verlassen sei. Jetzt wird eine bestimmte neue Position, von dem Standpunkte des ruhenden Raumes betrachtet, durch ein geändertes Vektorsystem

$$\bar{\varepsilon}_I + \Delta\bar{\varepsilon}_I\,, \quad \bar{\varepsilon}_{II} + \Delta\bar{\varepsilon}_{II}\,, \quad \bar{\varepsilon}_{III} + \Delta\bar{\varepsilon}_{III}$$

dargestellt. Die Änderungen müssen aber den Gleichungen (12), (13) und (14) entsprechen. Es wird demnach

$$\overline{\varepsilon_{II} + \Delta\varepsilon_{II}} \cdot \overline{\varepsilon_{III} + \Delta\varepsilon_{III}} = 0\,, \quad \ldots$$

sein. Dies gibt die Bedingungen:

$$\left\{\begin{aligned} &\bar{\varepsilon}_{II}\,\Delta\bar{\varepsilon}_{III} + \bar{\varepsilon}_{III}\,\Delta\bar{\varepsilon}_{II} + \Delta\bar{\varepsilon}_{III}\,\Delta\bar{\varepsilon}_{II} = 0\,,\\ &\bar{\varepsilon}_{III}\,\Delta\bar{\varepsilon}_I + \bar{\varepsilon}_I\,\Delta\bar{\varepsilon}_{III} + \Delta\bar{\varepsilon}_I\,\Delta\bar{\varepsilon}_{III} = 0\,,\\ &\bar{\varepsilon}_I\,\Delta\bar{\varepsilon}_{II} + \bar{\varepsilon}_{II}\,\Delta\bar{\varepsilon}_I + \Delta\bar{\varepsilon}_{II}\,\Delta\bar{\varepsilon}_I = 0\,. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Aus den Gleichungen (13) folgt

$$\left\{\begin{aligned} &\overline{\varepsilon_{II}\,\Delta\varepsilon_{III}} - \overline{\varepsilon_{III}\,\Delta\varepsilon_{II}} = \Delta\bar{\varepsilon}_I - \overline{\Delta\varepsilon_{II}\,\Delta\varepsilon_{III}}\,,\\ &\overline{\varepsilon_{III}\,\Delta\varepsilon_I} - \overline{\varepsilon_I\,\Delta\varepsilon_{III}} = \Delta\bar{\varepsilon}_{II} - \overline{\Delta\varepsilon_{III}\,\Delta\varepsilon_I}\,,\\ &\overline{\varepsilon_I\,\Delta\varepsilon_{II}} - \overline{\varepsilon_{II}\,\Delta\varepsilon_I} = \Delta\bar{\varepsilon}_{III} - \overline{\Delta\varepsilon_I\,\Delta\varepsilon_{II}}\,. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Endlich geben die Gleichungen (14):

$$\left\{\begin{aligned} &\overline{\varepsilon_I + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_I} \cdot \Delta\bar{\varepsilon}_I = 0\,, \quad \overline{\varepsilon_{II} + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_{II}} \cdot \Delta\bar{\varepsilon}_{II} = 0\,,\\ &\overline{\varepsilon_{III} + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_{III}} \cdot \Delta\bar{\varepsilon}_{III} = 0\,. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Euler hat zuerst nachgewiesen*), daß der Übergang aus der Position $[\bar{\varepsilon}_I, \bar{\varepsilon}_{II}, \bar{\varepsilon}_{III}]$ in die Position $[\bar{\varepsilon}_I + \Delta\bar{\varepsilon}_I, \bar{\varepsilon}_{II} + \Delta\bar{\varepsilon}_{II}, \bar{\varepsilon}_{III} + \Delta\bar{\varepsilon}_{III}]$ stets durch eine Rotation von bestimmter Amplitude und bestimmter Achse erfolgen kann.

108. Der Rotationsvektor für eine beliebige Lagenänderung um einen festen Punkt. Infolge der Bewegung geht ein beliebiger Punkt X (Fig. 65) des Körpers in die Lage X' über. Soll die Übergangsbewegung eine Rotation sein, so hat man

$$\Delta\bar{x} = 2\,\overline{\lambda(x + \tfrac{1}{2}\Delta x)}\,.$$

*) Euler nimmt jedoch die Decklage als Ausgangsposition.

Es gelten also auch die folgenden Gleichungen

$$\Delta\bar{\varepsilon}_I = 2\,\overline{\lambda(\varepsilon_I + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_I)}\,, \quad \Delta\bar{\varepsilon}_{II} = 2\,\overline{\lambda(\varepsilon_{II} + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_{II})}\,,$$

$$\Delta\bar{\varepsilon}_{III} = 2\,\overline{\lambda(\varepsilon_{III} + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_{III})}\,.$$

Wir bringen $\bar{\lambda}$ in die Form

$$\bar{\lambda} = \alpha \cdot \overline{\varepsilon_I + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_I} + \beta \cdot \overline{\varepsilon_{II} + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_{II}} + \gamma \cdot \overline{\varepsilon_{III} + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_{III}}$$

und bilden zur Bestimmung der Koeffizienten

$$\overline{\varepsilon_I + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_I} \cdot \bar{\lambda} = \alpha \cdot \overline{\varepsilon_I + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_I}^2 = \alpha\,.$$

Nun ist aber

$$\Delta\bar{\varepsilon}_{II} \cdot \overline{\varepsilon_{III} + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_{III}} = 2\,\bar{\lambda} \cdot \overline{\varepsilon_I + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_I}\,,$$

d. h.

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\,\Delta\bar{\varepsilon}_{II}\,\overline{\varepsilon_{III} + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_{III}}$$

und analog

$$\beta = \tfrac{1}{2}\,\Delta\bar{\varepsilon}_{III}\,\overline{\varepsilon_I + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_I}\,,$$

$$\gamma = \tfrac{1}{2}\,\Delta\bar{\varepsilon}_I\,\overline{\varepsilon_{II} + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_{II}}\,.$$

Folglich wird

$$\begin{aligned} 2\,\bar{\lambda} = {} & [\Delta\bar{\varepsilon}_{II} \cdot \overline{\varepsilon_{III} + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_{III}}] \cdot \overline{\varepsilon_I + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_I} \\ & + [\Delta\bar{\varepsilon}_{III} \cdot \overline{\varepsilon_I + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_I}] \cdot \overline{\varepsilon_{II} + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_{II}} \\ & + [\Delta\bar{\varepsilon}_I \cdot \overline{\varepsilon_{II} + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_{II}}] \cdot \overline{\varepsilon_{III} + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_{III}}\,. \end{aligned}$$

Hieraus gewinnt man die Komponente des Vektors $\bar{\lambda}$ in der Richtung ε_I

$$\begin{aligned} 2\,\bar{\varepsilon}_I\,\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_I = {} & [\Delta\bar{\varepsilon}_{II} \cdot \overline{\varepsilon_{III} + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_{III}}]\,[\bar{\varepsilon}_I \cdot \overline{\varepsilon_I + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_I}] \\ & + [\Delta\bar{\varepsilon}_{III} \cdot \overline{\varepsilon_I + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_I}]\,[\bar{\varepsilon}_I \cdot \overline{\varepsilon_{II} + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_{II}}] \\ & + [\Delta\bar{\varepsilon}_I \cdot \overline{\varepsilon_{II} + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_{II}}]\,[\bar{\varepsilon}_I \cdot \overline{\varepsilon_{III} + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_{III}}]\,. \end{aligned}$$

Nun ist aber nach den Gleichungen (15) bis (17):

$$\bar{\varepsilon}_I\overline{\varepsilon_I + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_I} = 1\,, \quad \bar{\varepsilon}_I \cdot \overline{\varepsilon_{II} + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_{II}} = 0\,, \quad \bar{\varepsilon}_I \cdot \overline{\varepsilon_{III} + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_{III}} = 0\,,$$

also

$$2\,\lambda_I = \Delta\bar{\varepsilon}_{II} \cdot \overline{\varepsilon_{III} + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_{III}} = -\Delta\bar{\varepsilon}_{III} \cdot \overline{\varepsilon_{II} + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_{II}}$$

und analog

$$2\,\lambda_{II} = \Delta\bar{\varepsilon}_{III} \cdot \overline{\varepsilon_I + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_I} = -\Delta\bar{\varepsilon}_I \cdot \overline{\varepsilon_{III} + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_{III}}\,,$$

$$2\,\lambda_{III} = \Delta\bar{\varepsilon}_I \cdot \overline{\varepsilon_{II} + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_{II}} = -\Delta\bar{\varepsilon}_{II} \cdot \overline{\varepsilon_I + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_I}\,.$$

Hiermit ist für den betrachteten Positionsübergang der Rotationsvektor eindeutig bestimmt.

109. Die neun Kosinus einer Position. Selbstverständlich ist die Art und Weise, wie man die drei Positionsvektoren $\bar{\varepsilon}_I, \bar{\varepsilon}_{II}, \bar{\varepsilon}_{III}$ in bezug auf den ruhenden Raum festlegt, ganz willkürlich, wenn man nur immer die Gleichungen (12) bis (14) in Nr. 107 beachtet. Am nächstliegenden ist die Darstellung durch rechtwinklige Komponenten im ruhenden Raume. Wir setzen also

$$(20) \qquad \begin{cases} \bar{\varepsilon}_I = \varepsilon_{I1} \cdot \bar{\varepsilon}_1 + \varepsilon_{I2} \cdot \bar{\varepsilon}_2 + \varepsilon_{I3} \cdot \bar{\varepsilon}_3 , \\ \bar{\varepsilon}_{II} = \varepsilon_{I1} \cdot \bar{\varepsilon}_1 + \varepsilon_{II2} \cdot \bar{\varepsilon}_2 + \varepsilon_{II3} \cdot \bar{\varepsilon}_3 , \\ \bar{\varepsilon}_{III} = \varepsilon_{III1} \cdot \bar{\varepsilon}_1 + \varepsilon_{III2} \cdot \bar{\varepsilon}_2 + \varepsilon_{III3} \cdot \bar{\varepsilon}_3 . \end{cases}$$

Die neun Koeffizienten $\varepsilon_{I1}, \varepsilon_{I3}, \ldots$ sind jetzt die Kosinus der Winkel, welche die Achsen des beweglichen Koordinatensystems mit denen des ruhenden einschließen. Aus den Gleichungen (20) folgt sofort

$$(21) \qquad \begin{cases} \bar{\varepsilon}_1 = \varepsilon_{I1} \cdot \bar{\varepsilon}_I + \varepsilon_{II1} \cdot \bar{\varepsilon}_{II} + \varepsilon_{III1} \cdot \bar{\varepsilon}_{III} , \\ \bar{\varepsilon}_2 = \varepsilon_{I2} \cdot \bar{\varepsilon}_I + \varepsilon_{II2} \cdot \bar{\varepsilon}_{II} + \varepsilon_{III2} \cdot \bar{\varepsilon}_{III} , \\ \bar{\varepsilon}_3 = \varepsilon_{I3} \cdot \bar{\varepsilon}_I + \varepsilon_{III2} \cdot \bar{\varepsilon}_{II} + \varepsilon_{III3} \cdot \bar{\varepsilon}_{III} . \end{cases}$$

Es sind also die Komponenten des Rotationsvektors für den ruhenden Raum mit Rücksicht auf die Gleichung (18) in Nr. 108:

$$(22) \qquad \begin{cases} \lambda_1 = \varepsilon_{I1} \cdot \lambda_I + \varepsilon_{II1} \cdot \lambda_{II} + \varepsilon_{III1} \cdot \lambda_{III} , \\ \lambda_2 = \varepsilon_{I2} \cdot \lambda_I + \varepsilon_{II2} \cdot \lambda_{II} + \varepsilon_{III2} \cdot \lambda_{III} , \\ \lambda_3 = \varepsilon_{I3} \cdot \lambda_I + \varepsilon_{II3} \cdot \lambda_{II} + \varepsilon_{III3} \cdot \lambda_{III} . \end{cases}$$

Setzt man die Ausdrücke für $\bar{\varepsilon}_I, \bar{\varepsilon}_{II}, \bar{\varepsilon}_{III}$ aus den Gleichungen (20) in die Gleichungen (12) bis (14) in Nr. 107 ein, so erhält man die bekannten Relationen, welchen die neun Kosinus stets genügen müssen. Jede Position eines um einen festen Punkt beweglichen starren Systems ist nach dem vorstehenden durch das Größensystem

$$\begin{matrix} \varepsilon_{I1} , & \varepsilon_{I2} , & \varepsilon_{I3} , \\ \varepsilon_{II1} , & \varepsilon_{II2} , & \varepsilon_{II3} ; \\ \varepsilon_{III1} , & \varepsilon_{III3} , & \varepsilon_{III3} \end{matrix}$$

vollständig festgelegt.

110. Ausdrücke der neun Kosinus durch die Komponenten des Rotationsvektors. In der Formel

$$\Delta\bar{x} = \frac{2}{1+\lambda^2}[\overline{\lambda x} + \overline{\lambda(\lambda x)}]$$

bezeichnet $\bar{x}$ den Vektor eines beliebigen Punktes im beweglichen System und $\Delta\bar{x}$ seine Änderung infolge der Rotation $(\bar{\eta}/\vartheta)$. Wir wählen nun als Anfangsposition die Decklage der beiden Achsenkreuze. Setzt man also $\bar{x} = \bar{\varepsilon}_1$, so wird $\bar{x} + \Delta\bar{x} = \bar{\varepsilon}_I$, d. h. $\Delta\bar{x} = \bar{\varepsilon}_I - \bar{\varepsilon}_1$. Unter dieser Annahme gewinnt man die Beziehung

$$\bar{\varepsilon}_I - \bar{\varepsilon}_1 = \frac{2}{1+\lambda^2}[\overline{\lambda\,\varepsilon_1} + \lambda_1 \cdot \bar{\lambda} - \lambda^2 \cdot \bar{\varepsilon}_1]\,.$$

Hieraus folgt sofort:

$$\bar{\varepsilon}_I \bar{\varepsilon}_1 - 1 = \varepsilon_{I1} - 1 = \frac{2}{1+\lambda^2}(\lambda_1^2 - \lambda^2)\,,$$

d. h.

$$(23)\quad \begin{cases} \varepsilon_{I1} = 1 + \dfrac{2}{1+\lambda^2}(\lambda_1^2 - \lambda^2)\,, \\ \text{ferner} \\ \varepsilon_{I2} = \dfrac{2}{1+\lambda^2}(\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2)\,, \\ \varepsilon_{I3} = \dfrac{2}{1+\lambda^2}(-\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3)\,. \end{cases}$$

Aus der analogen Gleichung

$$\bar{\varepsilon}_{II} - \bar{\varepsilon}_2 = \frac{2}{1+\lambda^2}[\overline{\lambda\,\varepsilon_2} + \lambda_2 \cdot \bar{\lambda} - \lambda^2 \cdot \bar{\varepsilon}_2]$$

folgt

$$(24)\quad \begin{cases} \varepsilon_{II1} = \dfrac{2}{1+\lambda^2}(-\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2)\,, \\ \varepsilon_{II2} = 1 + \dfrac{2}{1+\lambda^2}(\lambda_2^2 - \lambda^2)\,, \\ \varepsilon_{II3} = \dfrac{2}{1+\lambda^2}(\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)\,. \end{cases}$$

Endlich gewinnt man aus

$$\bar{\varepsilon}_{III} - \bar{\varepsilon}_3 = \frac{2}{1+\lambda^2}[\overline{\lambda\,\varepsilon_3} + \lambda_3 \cdot \bar{\lambda} - \lambda^2 \cdot \bar{\varepsilon}_3]$$

noch die Ausdrücke:

$$(25)\quad \begin{cases} \varepsilon_{III1} = \dfrac{2}{1+\lambda^2}(\lambda_2 + \lambda_3\lambda_1)\,, \\ \varepsilon_{III2} = \dfrac{2}{1+\lambda^2}(-\lambda_1 + \lambda_3\lambda_2)\,, \\ \varepsilon_{III3} = 1 + \dfrac{2}{1+\lambda^2}(\lambda_3^2 - \lambda^2)\,. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen ist

$$\lambda^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

zu setzen.

Den Einheitsvektor $\bar{\eta}$ in

$$\bar{\lambda} = \bar{\eta} \cdot \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}$$

legt man am bequemsten durch Polarkoordinaten β (Breite) und λ (Länge) der Drehachse fest. Dann ist

$$\eta_1 = \cos\beta\cos\lambda\,, \quad \eta_2 = \cos\beta\sin\lambda\,, \quad \eta_3 = \sin\beta\,.$$

Aufgabe 50. Man berechne die neun Kosinus für den besonderen Fall $\beta = 30^0$, $\lambda = 48^0$, $\vartheta = 36^0$ nach den Formeln (23) bis (25).

111. Die Komponenten des Rotationsvektors als Funktionen der neun Kosinus. Aus den Gleichungen (23) bis (25) erhält man zunächst

$$\varepsilon_{I1} + \varepsilon_{II2} + \varepsilon_{III3} = 3 + \frac{2}{1+\lambda^2}(\lambda_1^2 - \lambda^2 + \lambda_2^2 - \lambda^2 + \lambda_3^2 - \lambda^2)\,,$$

also

$$(26)\qquad 1 + \lambda^2 = \frac{4}{1 + \varepsilon_{I1} + \varepsilon_{II2} + \varepsilon_{III3}}\,.$$

Da nun weiter

$$(27)\quad \begin{cases} \varepsilon_{II3} - \varepsilon_{III2} = \dfrac{4}{1+\lambda^2}\lambda_1\,, \qquad \varepsilon_{III1} - \varepsilon_{I3} = \dfrac{4}{1+\lambda^2}\lambda_2\,, \\ \varepsilon_{I2} - \varepsilon_{II1} = \dfrac{4}{1+\lambda^2}\cdot\lambda_3 \end{cases}$$

folgt, so sind alle Komponenten von $\bar{\lambda}$ durch die neun Kosinus ausgedrückt.

Aufgabe 51. Man bestimme aus den Gleichungen (26) und (27) $\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}$.

112. Zusammensetzung von Rotationen um sich schneidende Achsen. Ein bewegliches System mit einem festen Punkte gehe infolge der Rotation $[\bar{\lambda}]$ aus einer Anfangsposition (A) in eine Position (A'). Hierauf werde es durch eine zweite Rotation $[\bar{\lambda}']$ in die Position (A'') übergeführt. Es handelt sich nun darum, diejenige Rotation $[\bar{\lambda}'']$ zu finden, welche das System unmittelbar aus der Lage (A) in die Lage (A'') bringt.

Die Veränderung des Vektors eines beliebigen Punktes X ist

(a) $$\Delta\bar{x} = 2\cdot\overline{\lambda r},$$

wenn $\bar{r}$ den Vektor der Sehnenmitte des betreffenden Weges bedeutet. Den Effekt der zweiten Rotation $[\bar{\lambda}']$ drücken wir aus durch die Gleichung

(b) $$\Delta\bar{x}' = 2\cdot\overline{\lambda' r'}.$$

Nun ist

$$\bar{r} = \bar{x} + \tfrac{1}{2}\Delta\bar{x} \quad \text{und} \quad \bar{r}' = \bar{x} + \Delta\bar{x} + \tfrac{1}{2}\Delta'\bar{x}.$$

Die ganze Änderung $(\Delta''\bar{x})$ infolge der beiden Rotationen wird

(c) $$\Delta''\bar{x} = \Delta\bar{x} + \Delta'\bar{x}.$$

Soll diese Änderung durch eine einzige Rotation hervorgebracht werden, so muß

(d) $$\Delta''\bar{x} = 2\cdot\overline{\lambda'' r''}$$

sein und es ist

$$\bar{r}'' = \bar{x} + \tfrac{1}{2}\Delta''\bar{x}$$

zu nehmen. Es bestehen also die Beziehungen

(e) $$\bar{r} = \bar{r}'' - \tfrac{1}{2}\Delta'\bar{x}$$

und

(f) $$\bar{r}' = \bar{r}'' + \tfrac{1}{2}\Delta\bar{x}.$$

Wir bilden zuerst die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\Delta\bar{x} = \overline{\lambda r} = \overline{\lambda r''} - \tfrac{1}{2}\overline{\lambda\cdot\Delta' x}.$$

Hier setzen wir $\Delta'\bar{x}$ aus Gleichung (b) ein und erhalten

$$\tfrac{1}{2}\Delta\bar{x} = \overline{\lambda r''} - \overline{\lambda(\lambda' r')} = \overline{\lambda r''} - \overline{\lambda(\lambda' r'')} - \tfrac{1}{2}\overline{\lambda(\lambda'\Delta x)}\,.$$

Mit Verwendung der Abkürzung $\varkappa = 1 - \bar{\lambda}\bar{\lambda}'$ wird also

$$\text{(g)} \qquad \tfrac{1}{2}\varkappa\cdot\Delta\bar{x} = \overline{\lambda r''} - \overline{\lambda(\lambda' r'')}\,.$$

Durch einen ganz analogen Gang der Rechnung erhält man zweitens die Gleichung

$$\text{(h)} \qquad \tfrac{1}{2}\varkappa\cdot\Delta'\bar{x} = \overline{\lambda' r''} - \overline{\lambda'(r''\lambda)}\,.$$

Folglich mit Rücksicht auf die Gleichungen (c) und (d):

$$\varkappa\cdot\overline{\lambda'' r''} = \overline{\lambda r''} + \overline{\lambda'' r''} - \overline{\lambda(\lambda' r'')} - \overline{\lambda'(r''\lambda)}\,.$$

Nun ist aber

$$\overline{\lambda(\lambda' r'')} + \overline{\lambda'(r''\lambda)} + \overline{r''(\lambda\lambda')} = 0\,.$$

Mithin wird

$$\varkappa\cdot\overline{\lambda'' r''} = \overline{\lambda r''} + \overline{\lambda' r''} - \overline{(\lambda\lambda') r''}\,.$$

Da diese Beziehung für jeden Wert von $\bar{r}''$ gültig sein muß, so ist

$$\text{(28)} \qquad \varkappa\cdot\bar{\lambda}'' = \bar{\lambda} + \bar{\lambda}' - \overline{\lambda\lambda'}\,.$$

Diese Gleichung drückt die Abhängigkeit des resultierenden Rotationsvektors $\bar{\lambda}''$ von den gegebenen $\bar{\lambda}$ und $\bar{\lambda}'$ eindeutig aus. Um nun auch die Lage der neuen Achse $\bar{\eta}''$ zu erkennen, bilden wir aus Gleichung (28) das Produkt

$$\varkappa\cdot\overline{\lambda\lambda''} = \overline{\lambda\lambda'} - \overline{\lambda(\lambda\lambda')}$$

und hieraus

$$\varkappa\cdot\overline{\lambda\lambda''}\cdot\overline{\lambda\lambda'} = \overline{\lambda\lambda'}^2\,.$$

Ebenso einfach folgt

$$\varkappa\cdot\overline{\lambda'\lambda''}\cdot\overline{\lambda\lambda'} = -\overline{\lambda\lambda'}^2\,.$$

Es wird also

$$\overline{\lambda''\lambda}\cdot\overline{\lambda\lambda'} = \overline{\lambda'\lambda''}\cdot\overline{\lambda\lambda'}\,.$$

Setzt man jetzt der Fig. 66 entsprechend

$$(\bar{\eta}'/\bar{\eta}'') = \alpha\,, \quad (\bar{\eta}''/\bar{\eta}) = \beta\,, \quad (\bar{\eta}/\bar{\eta}') = \gamma$$

und bezeichnet man die entsprechenden Winkel des sphärischen Dreieckes, welches durch die Endpunkte der Einheitsvektoren $\bar{\eta}$, $\bar{\eta}'$, $\bar{\eta}''$ bestimmt wird, mit A, B, C, dann

folgt aus der letzten Gleichung

$$\sin\beta\cos A\cdot \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}=\sin\alpha\cos B\cdot\operatorname{tg}\frac{\vartheta'}{2}.$$

Diese Beziehung wird identisch mit der Sinusformel

$$\sin\beta\sin A=\sin\alpha\sin B$$

für

$$A=\frac{\vartheta}{2}\quad\text{und}\quad B=\frac{\vartheta'}{2}.$$

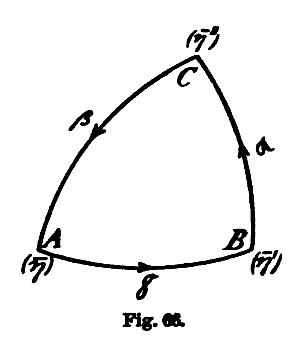


Fig. 66.

Um die Amplitude der resultierenden Drehung zu bestimmen, quadrieren wir die Gleichung (28) und erhalten

$$\varkappa^2\cdot\lambda''^2=\lambda^2+\lambda'^2+2(\bar\lambda\bar\lambda')+\overline{\bar\lambda\bar\lambda'}^2,$$

also

$$\varkappa^2(1+\lambda''^2)=1+\lambda^2+\lambda'^2+\lambda^2\lambda'^2.$$

Nun ist aber

$$\varkappa=1-\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\operatorname{tg}\frac{\vartheta'}{2}\cos\gamma$$

und deshalb:

$$(29)\qquad \varkappa\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta'}{2}=\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta'}{2}-\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\vartheta'}{2}\cos\gamma.$$

Folglich

$$(30)\qquad \cos\frac{\vartheta''}{2}=\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta'}{2}-\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\vartheta'}{2}\cos\gamma.$$

Nimmt man also in der Fig. 66 $C=\frac{\vartheta''}{2}$, so gibt dieselbe den geometrischen Zusammenhang der in der analytischen Rechnung auftretenden Größen.

Man erkennt aus der Gleichung (28) auch ohne weiteres, daß die Reihenfolge der gegebenen Rotationen $[\bar\lambda]$, $[\bar\lambda']$ nicht vertauschbar ist, ohne $\bar\lambda''$ zu ändern. ϑ'' behält zwar bei der umgekehrten Folge denselben Wert bei, aber die Achse $\bar\eta''$ kommt in eine andere Lage, die leicht anzugeben ist.

113. Zusammensetzung von Rotationen endlicher Amplitude um windschiefe Achsen. Die Lösung dieses Problems ist für die Geometrie der Bewegung von fundamentaler Bedeutung. Denn sobald gezeigt ist, daß sich immer zwei Rotationen um windschiefe Achsen finden lassen, deren Folge einer gegebenen Schraubung äquivalent sind, ist zugleich nachgewiesen, daß sich die allgemeinste Bewegung des Raumes in Rotationen auflösen läßt und es zeigt sich, daß man als Elementarbewegung nur die Rotation aufzufassen hat.

Die erste Rotation $[\bar{\lambda} \| \bar{c}]$ erfolge um eine Achse $\bar{\eta}$, die durch den Endpunkt von $\bar{c}$ geht. Analog ist die Rotation $[\bar{\lambda}' \| \bar{c}']$ aufzufassen. Entsprechend diesen Festsetzungen ist

$$\tfrac{1}{2}\Delta\bar{x} = \overline{\lambda(r-c)} \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}\Delta'\bar{x} = \overline{\lambda'(r'-c')}\,.$$

Die äquivalente Schraubung bringen wir in die Form

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{d}''\bar{x} = \overline{\lambda''(r''-c'')} + \tfrac{1}{2}\bar{e}'' = \tfrac{1}{2}\Delta''\bar{x} + \tfrac{1}{2}\bar{e}''.$$

Jetzt hat selbstverständlich die Translation $\bar{e}''$ die Richtung von $\bar{\eta}''$ oder — was dasselbe ist — von $\bar{\lambda}''$ und die geforderte Äquivalenz wird ausgedrückt durch die Beziehung

$$\mathfrak{d}''\bar{x} = \Delta\bar{x} + \Delta'\bar{x}\,.$$

Für die Vektoren der Sehnenmitten gelten die Gleichungen:

$$\bar{r} = \bar{x} + \tfrac{1}{2}\Delta\bar{x}\,, \quad \bar{r}' = \bar{x} + \Delta\bar{x} + \tfrac{1}{2}\Delta'\bar{x}\,, \quad \bar{r}'' = \bar{x} + \tfrac{1}{2}\Delta''\bar{x}\,.$$

Man hat also für die erforderlichen Eliminationen die Formeln

$$\bar{r} = \bar{r}'' - \tfrac{1}{2}\Delta'\bar{x} + \tfrac{1}{2}\bar{e}'', \quad \bar{r}' = \bar{r}'' + \tfrac{1}{2}\Delta\bar{x} + \tfrac{1}{2}\bar{e}''.$$

Der Gang der Rechnung ist jetzt demjenigen der vorangehenden Nummer durchaus analog.

Man bildet wieder zunächst

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\Delta\bar{x} &= \overline{\lambda(r-c)} = \overline{\lambda(r''-c+\tfrac{1}{2}e'')} - \tfrac{1}{2}\overline{\lambda\cdot\Delta' x}\\ &= \overline{\lambda(r''-c+\tfrac{1}{2}e'')} - \overline{\lambda\,[\lambda'(r'-c')]}\end{aligned}$$

oder

$$\tfrac{1}{2}\Delta\bar{x} = \overline{\lambda(r''-c+\tfrac{1}{2}e'')} - \overline{\lambda\,[\lambda'(r''-c'+\tfrac{1}{2}e'')]} - \tfrac{1}{2}\overline{\lambda(\lambda'\cdot\Delta x)}\,.$$

Hieraus folgt

$$\text{(a)} \qquad \tfrac{1}{2}\varkappa\cdot\Delta\bar{x} = \overline{\lambda(r''-c+\tfrac{1}{2}e'')} - \overline{\lambda\,[\lambda'(r''-c'+\tfrac{1}{2}e'')]}\,,$$

wo wieder

$$\varkappa = 1 - \bar{\lambda}\bar{\lambda}'$$

gesetzt ist. Ebenso ergibt sich

$$\text{(b)} \qquad \tfrac{1}{2}\varkappa \cdot \Delta' \bar{x} = \overline{\lambda'(r'' - c' + \tfrac{1}{2} e'')} + \overline{\lambda'[\lambda(r'' - c + \tfrac{1}{2} e'')]} \,.$$

Man erhält also durch Addition

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\varkappa \cdot \mathfrak{d}'' \bar{x} = {} & \overline{(\lambda + \lambda') r''} - \overline{\lambda(\lambda' r'')} - \overline{\lambda'(r'' \lambda)} \\ & + \tfrac{1}{2}\overline{(\lambda + \lambda') e''} - \tfrac{1}{2}\overline{\lambda(\lambda' e'')} - \tfrac{1}{2}\overline{\lambda'(e'' \lambda)} \\ & - \overline{\lambda c} - \overline{\lambda' c'} + \overline{\lambda(\lambda' c')} - \overline{\lambda'(\lambda c)} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\varkappa \cdot \mathfrak{d}'' \bar{x} = {} & \overline{(\lambda + \lambda') r''} - \overline{(\lambda \lambda') r''} \\ & + \tfrac{1}{2}\overline{(\lambda + \lambda') e''} - \tfrac{1}{2}\overline{(\lambda \lambda') e''} \\ & - \overline{\lambda c} - \overline{\lambda' c'} + \overline{\lambda(\lambda' c')} - \overline{\lambda'(\lambda c)} \,. \end{aligned}$$

Dies ist aber gleich

$$\varkappa \cdot \overline{\lambda''(r'' - c'')} + \tfrac{1}{2}\varkappa \cdot \bar{e}'' .$$

Deshalb wird, wie bei der Zusammensetzung von Rotationen um sich schneidende Achsen:

$$\varkappa \cdot \bar{\lambda}'' = \bar{\lambda} + \bar{\lambda}' - \overline{\lambda \lambda'}$$

und außerdem

$$\text{(c)} \qquad \tfrac{1}{2}\varkappa \cdot \bar{e}'' - \varkappa \cdot \overline{\lambda'' c''} = -\overline{\lambda c} - \overline{\lambda' c'} + \overline{\lambda(\lambda' c')} - \overline{\lambda'(\lambda c)} \,.$$

Zur Vereinfachung dieser Gleichung legen wir den Bezugspunkt der Vektoren in den Endpunkt C von $\bar{c}$ und setzen $\bar{c}'$ gleich dem kürzesten Abstande $\bar{k}$ der beiden gegebenen Rotationsachsen, so daß

$$\text{(d)} \qquad \tfrac{1}{2}\varkappa \cdot \bar{e}'' - \varkappa \cdot \overline{\lambda'' c''} = -\overline{\lambda' k} + \overline{\lambda(\lambda' k)}$$

wird. Die Elimination von $\bar{e}''$ ergibt nun

$$\text{(31)} \qquad \varkappa \cdot \overline{\lambda''(\lambda'' c'')} - \overline{\lambda''(\lambda' k)} - (\bar{\lambda} \bar{\lambda}') \cdot \overline{\lambda'' k} = 0$$

als Gleichung der resultierenden Schraubenachse.

Jetzt bleibt noch der Parameter $\bar{e}''$ der entsprechenden Schraubung zu bestimmen. Wir nehmen hierzu die Gleichung (d) in der Form

$$\tfrac{1}{2}\varkappa \cdot \bar{e}'' = \varkappa \overline{\lambda'' c''} - \overline{\lambda' k} - (\bar{\lambda} \bar{\lambda}') \cdot k$$

und bilden daraus

$$\tfrac{1}{2}\varkappa \cdot \lambda'' e'' = -\bar{\lambda}'' \overline{\lambda' k} - (\bar{\lambda} \bar{\lambda}') \cdot (\bar{\lambda}'' \bar{k})$$

oder

$$\tfrac{1}{2}\varkappa \cdot \lambda'' e'' = \overline{\lambda' \lambda''} \bar{k} - (\bar{\lambda} \bar{\lambda}') \cdot (\bar{\lambda}'' \bar{k}) \,.$$

Aus
$$\varkappa \cdot \bar{\lambda}'' = \bar{\lambda} + \bar{\lambda}' - \overline{\lambda \lambda'}$$
folgt
$$\varkappa \cdot \overline{\lambda' \lambda''} = -\overline{\lambda \lambda'} - \overline{\lambda'(\lambda \lambda')}$$
und hieraus
$$\varkappa \cdot (\bar{k} \cdot \overline{\lambda' \lambda''}) = -\bar{k} \cdot \overline{\lambda \lambda'}.$$
Mithin wird
$$\tfrac{1}{2} \varkappa^2 \cdot \lambda'' e'' = -\bar{k} \cdot \overline{\lambda \lambda'} - \varkappa \cdot (\bar{\lambda} \bar{\lambda}')(\bar{\lambda}'' \bar{k}).$$
Ferner erhält man
$$\varkappa \cdot (\bar{\lambda}'' \bar{k}) = -\overline{\lambda \lambda'} \bar{k},$$
so daß die einfache Gleichung
$$\tfrac{1}{2} \varkappa \cdot \lambda'' e'' = -\overline{\lambda \lambda'} \cdot \bar{k}$$
folgt. Beachtet man hierin noch die Beziehung
$$\varkappa \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta'}{2} = \cos \frac{\vartheta''}{2},$$
so wird vom Vorzeichen abgesehen
$$\tfrac{1}{2} e'' \sin \frac{\vartheta''}{2} = \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\vartheta'}{2} \sin \gamma \cdot k. \tag{32}$$
Diese schöne Formel wurde von **Rodrigues***) gefunden.

114. Die Eulerschen Positionswinkel. Die Komponenten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des Rotationsvektors $\bar{\lambda}$ haben wir bereits (Nr. 110) als ein Hilfsmittel kennen gelernt, um die Lage eines um einen festen Punkt beweglichen starren Systems festzulegen. **Euler** hat zum gleichen Zwecke drei Winkel benutzt und ist dadurch zu einer Darstellung der drei Positionsvektoren $\bar{\varepsilon}_I, \bar{\varepsilon}_{II}, \bar{\varepsilon}_{III}$ gelangt, die vielfache Anwendungen gefunden hat.

Ausgehend von der Decklage des beweglichen Systems und des ruhenden Raumes dreht man zunächst um die Achse $\bar{\varepsilon}_3$ entsprechend der Amplitude φ. Aus der Gleichung
$$\bar{x}' = \cos\vartheta \cdot \bar{x} + \sin\vartheta \cdot \overline{\eta x}$$
folgt dann für diesen Fall
$$\text{(a)} \quad \begin{cases} \bar{\varepsilon}_1' = \cos\varphi \cdot \bar{\varepsilon}_1 + \sin\varphi \cdot \bar{\varepsilon}_2, \\ \bar{\varepsilon}_2' = \cos\varphi \cdot \bar{\varepsilon}_2 - \sin\varphi \cdot \bar{\varepsilon}_1, \\ \bar{\varepsilon}_3' = \bar{\varepsilon}_3. \end{cases}$$

*) Des lois géometriques qui régissent les déplacements d'un systeme solide dans l'espace. Journ. de Liouville. Paris 1840.

Hierauf dreht man das System weiter um die Achse $\bar{\varepsilon}_2'$ mit der Amplitude ψ. Dieser zweiten Rotation entsprechen die Gleichungen

$$
\text{(b)} \qquad \begin{cases} \bar{\varepsilon}_1'' = \cos\psi \cdot \bar{\varepsilon}_1' - \sin\psi \cdot \bar{\varepsilon}_3', \\ \bar{\varepsilon}_2'' = \bar{\varepsilon}_2', \\ \bar{\varepsilon}_3'' = \cos\psi \cdot \bar{\varepsilon}_3' + \sin\psi \cdot \bar{\varepsilon}_1'. \end{cases}
$$

Endlich lasse man eine dritte Drehung um die Achse $\bar{\varepsilon}_1''$ erfolgen mit dem Winkel χ. Dann ist

$$
\text{(c)} \qquad \begin{cases} \bar{\varepsilon}_I \ = \bar{\varepsilon}_1'', \\ \bar{\varepsilon}_{II} = \cos\chi \cdot \bar{\varepsilon}_2'' + \sin\chi \cdot \bar{\varepsilon}_3'', \\ \bar{\varepsilon}_{III} = \cos\chi \cdot \bar{\varepsilon}_3'' - \sin\chi \cdot \bar{\varepsilon}_2''. \end{cases}
$$

Aus diesen Gleichungen folgt in Verbindung mit (b) und (a):

$$
\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}_I &= \varepsilon_{I1} \cdot \bar{\varepsilon}_1 + \varepsilon_{I2} \cdot \bar{\varepsilon}_2 + \varepsilon_{I3} \cdot \bar{\varepsilon}_3, \\
\bar{\varepsilon}_{II} &= \varepsilon_{II1} \cdot \bar{\varepsilon}_1 + \varepsilon_{II2} \cdot \bar{\varepsilon}_2 + \varepsilon_{II3} \cdot \bar{\varepsilon}_3, \\
\bar{\varepsilon}_{III} &= \varepsilon_{III1} \cdot \bar{\varepsilon}_1 + \varepsilon_{III2} \cdot \bar{\varepsilon}_2 + \varepsilon_{III3} \cdot \bar{\varepsilon}_3,
\end{aligned}
$$

worin

$$
(33) \qquad \begin{cases}
\varepsilon_{I1} \ = \cos\psi \cos\varphi, \\
\varepsilon_{II1} \ = -\cos\chi \sin\varphi + \sin\chi \cos\varphi \sin\psi, \\
\varepsilon_{III1} = \sin\chi \sin\varphi + \cos\chi \cos\varphi \sin\psi, \\
\varepsilon_{I2} \ = \cos\psi \sin\varphi, \\
\varepsilon_{II2} \ = \cos\chi \cos\varphi + \sin\chi \sin\varphi \cdot \sin\psi, \\
\varepsilon_{III2} = -\sin\chi \cos\varphi + \cos\chi \sin\varphi \sin\psi, \\
\varepsilon_{I3} \ = -\sin\psi, \\
\varepsilon_{II3} \ = \sin\chi \cdot \cos\psi, \\
\varepsilon_{III3} = \cos\chi \cos\psi
\end{cases}
$$

zu setzen ist.

Man kann auch umgekehrt die drei Positionswinkel φ, ψ, χ aus den neun Kosinus bestimmen. Denn es ist

$$
(34) \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\varepsilon_{I2}}{\varepsilon_{I1}}, \quad \sin\psi = -\varepsilon_{I3}, \quad \operatorname{tg}\chi = \frac{\varepsilon_{II3}}{\varepsilon_{III3}}.
$$

Sollten sich Schwierigkeiten in der Wahl der Quadranten einstellen, dann entscheidet man dieselben durch die Kontrolle der Gleichungen für $\varepsilon_{II1}, \varepsilon_{II2}, \varepsilon_{III1}, \varepsilon_{III2}$.

Aufgabe 52. Nachdem in Aufgabe 51 die neun Kosinus berechnet sind, bestimme man die Positionswinkel φ, ψ, χ.

115. Ableitung des Rotationsvektors aus den Lagen von zwei Punkten des Systems. Durch die Angabe der Lagen von drei nicht in einer Geraden liegenden Punkten eines starren Systems und durch eine Festsetzung der positiven Richtung der Normalen zu dem entsprechenden Dreieck ist die Position dieses Systems vollständig bestimmt. Im Falle der Rotation um ein festes Zentrum sind also die Lagen von zwei Punkten X, Y des Systems in der Anfangs- und Endposition ausreichend, um die Richtung der Drehachse und die Amplitude der Drehung zu berechnen. Für den ersten Punkt gilt die Beziehung

$$\text{(a)} \qquad \tfrac{1}{2}\Delta\bar{x} = \overline{\lambda(x + \tfrac{1}{2}\Delta x)}$$

und für den zweiten

$$\text{(b)} \qquad \tfrac{1}{2}\Delta\bar{y} = \overline{\lambda(y + \tfrac{1}{2}\Delta y)}\,.$$

Wir nehmen nun an, daß die zwölf Größen

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \Delta x_3,$$
$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \Delta y_1,\ \Delta y_2,\ \Delta y_3$$

auf irgend eine Weise bekannt geworden sind. Jetzt kann man aus den Komponentengleichungen

$$\tfrac{1}{2}\Delta x_1 = \lambda_2(x_3 + \tfrac{1}{2}\Delta x_3) - \lambda_3(x_2 + \tfrac{1}{2}\Delta x_2)\,,$$
$$\tfrac{1}{2}\Delta y_1 = \lambda_2(y_3 + \tfrac{1}{2}\Delta y_3) - \lambda_3(y_2 + \tfrac{1}{2}\Delta y_2)$$

λ_2 und λ_3 bestimmen. Man findet

$$\text{(c)} \qquad D\cdot\lambda_2 = -\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} \Delta x_1\,, & x_2 + \tfrac{1}{2}\Delta x_2 \\ \Delta y_1\,, & y_2 + \tfrac{1}{2}\Delta y_2 \end{vmatrix}$$

und

$$\text{(d)} \qquad D\cdot\lambda_3 = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} \Delta x_1\,, & x_3 + \tfrac{1}{2}\Delta x_3 \\ \Delta y_1\,, & y_3 + \tfrac{1}{2}\Delta y_3 \end{vmatrix},$$

wenn

$$D = +\begin{vmatrix} x_2 + \tfrac{1}{2}\Delta x_2\,, & x_3 + \tfrac{1}{2}\Delta x_3 \\ y_2 + \tfrac{1}{2}\Delta y_2\,, & y_3 + \tfrac{1}{2}\Delta y_3 \end{vmatrix}$$

gesetzt ist. Verwendet man nun in gleicher Weise die Beziehungen:

$$\tfrac{1}{2}\Delta x_2 = \lambda_3(x_1 + \tfrac{1}{2}\Delta x_1) - \lambda_1(x_3 + \tfrac{1}{2}\Delta x_3)$$
$$\tfrac{1}{2}\Delta y_2 = \lambda_3(y_1 + \tfrac{1}{2}\Delta y_1) - \lambda_1(y_3 + \tfrac{1}{2}\Delta y_3),$$

so wird

(e) $$D' \cdot \lambda_3 = -\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} \Delta x_2, & x_3 + \tfrac{1}{2}\Delta x_3 \\ \Delta y_2, & y_3 + \tfrac{1}{2}\Delta y_3 \end{vmatrix}$$

(f) $$D' \cdot \lambda_1 = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} \Delta x_2, & x_1 + \tfrac{1}{2}\Delta x_1 \\ \Delta y_2, & y_1 + \tfrac{1}{2}\Delta y_1 \end{vmatrix}$$

mit

$$D' = \begin{vmatrix} x_3 + \tfrac{1}{2}\Delta x_3, & x_1 + \tfrac{1}{2}\Delta x_1 \\ y_3 + \tfrac{1}{2}\Delta y_3, & y_1 + \tfrac{1}{2}\Delta y_1 \end{vmatrix}.$$

Die Werte für λ_3 aus den Gleichungen (d) und (e) müssen übereinstimmen. Gleiches gilt für λ_2 und λ_1, wenn man noch die Beziehungen für Δx_3 und Δy_3 benutzt. Dies ist möglich, da die zwölf gegebenen Koordinaten drei Bedingungen genügen müssen. Zunächst folgt aus den Gleichungen (a) und (b)

$$\Delta\bar{x} \cdot \overline{x + \tfrac{1}{2}\Delta x} = 0, \quad \Delta\bar{y} \cdot \overline{y + \tfrac{1}{2}\Delta y} = 0,$$

d. h.

(α) $$\Delta x_1(x_1 + \tfrac{1}{2}\Delta x_1) + \Delta x_2(x_2 + \tfrac{1}{2}\Delta x_2) + \Delta x_3(x_3 + \tfrac{1}{2}\Delta x_3) = 0$$

(β) $$\Delta y_1(y_1 + \tfrac{1}{2}\Delta y_1) + \Delta y_2(y_2 + \tfrac{1}{2}\Delta y_2) + \Delta y_3(y_3 + \tfrac{1}{2}\Delta y_3) = 0.$$

Ferner folgt aus den Gleichungen (a) und (b)

$$\tfrac{1}{2}(\Delta\bar{y} - \Delta\bar{x}) = \overline{\lambda[y - x + \tfrac{1}{2}(\Delta y - \Delta x)]}.$$

Demnach muß auch

$$(\Delta\bar{y} - \Delta\bar{x})[\bar{y} - \bar{x} + \tfrac{1}{2}(\Delta\bar{y} - \Delta\bar{x})] = 0$$

sein, oder

(γ) $$\left\{\begin{aligned} &\Delta y_1(x_1 + \tfrac{1}{2}\Delta x_1) + \Delta y_2(x_2 + \tfrac{1}{2}\Delta x_2) + \Delta y_3(x_3 + \tfrac{1}{2}\Delta x_3) \\ &+ \Delta x_1(y_1 + \tfrac{1}{2}\Delta y_1) + \Delta x_2(y_2 + \tfrac{1}{2}\Delta y_2) + \Delta x_3(y_3 + \tfrac{1}{2}\Delta y_3) = 0. \end{aligned}\right.$$

Sind die Bedingungen (α), (β), (γ) tatsächlich erfüllt, so läßt sich auch zeigen, daß umgekehrt die oben berechneten Werte von λ_1, λ_2, λ_3 die Gleichungen (a) und (b) identisch erfüllen, sowie die analoge Gleichung für jeden dritten Punkt $\bar{z}$, der

mit den Punkten $\bar{x}$, $\bar{y}$ in starrer Verbindung steht, daß also jede Bewegung des starren Körpers, bei welcher ein Punkt desselben fest bleibt, mit der Rotation um eine eindeutig bestimmte Achse identisch ist.

Wir werden auf das im vorstehenden behandelte Problem in der „Phoronomie" des starren Körpers (Dynamik) zurückkommen.

B) Kinematische Elementarvektoren am starren System.

116. Übergang zu unendlich kleinen Wegen. Geschwindigkeit. In der Differentialgeometrie, welche die Eigenschaften der krummen Linien und Flächen behandelt, geht man von einem Raumpolygon aus, faßt zwei oder drei aufeinander folgende Seiten desselben ins Auge und läßt dann ihre Richtungsdifferenzen und ihre Längen unendlich klein werden, um zu einer Grundlage für die Theorie der Kurven zu gelangen. Ganz analog verfährt man in der Kinematik mit den Positionen eines beweglichen starren Systems. Betrachten wir in diesem Sinne die Gleichung für die allgemeine aus Translation $\Delta\bar{c}$ und Rotation $[\bar{\lambda}\,\|\,\bar{c}]$ bestehende endliche Änderung des Vektors eines Systempunktes

(a) $$\Delta\bar{x} = \Delta\bar{c} + 2\,\overline{\lambda(x-c)}\,,$$

wo

$$\bar{\lambda} = \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\cdot\bar{\eta}$$

bedeutet und lassen wir darin $\Delta\bar{c}$ unendlich klein ($= d\bar{c}$) und ebenso die Amplitude der Rotation unendlich klein ($= d\vartheta$) werden, so fällt offenbar der Vektor der Sehnenmitte $\bar{r}$ mit $\bar{x}$ zusammen, wenn wir nur unendlich kleine Größen der ersten Ordnung beachten.

Die obige Gleichung geht jetzt über in

$$d\bar{x} = d\bar{c} + 2\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\,d\vartheta)\cdot\overline{\eta(x-c)}\,.$$

Bei unserer Voraussetzung über die Größenordnung der Inkremente wird aber

$$2\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\,d\vartheta) = d\vartheta$$

zu setzen sein.

Gleichung (a) nimmt also jetzt die Form an

(b) $$d\bar{x} = d\bar{c} + d\vartheta\cdot\overline{\eta(x-c)}\,.$$

Betrachtet man alle veränderlichen Größen als Funktionen der Zeit τ, dann folgt aus Gleichung (b) die Beziehung

$$\text{(c)} \qquad \frac{d\bar{x}}{d\tau} = \frac{d\bar{c}}{d\tau} + \frac{d\vartheta}{d\tau} \cdot \overline{\eta(x-c)},$$

welche im allgemeinen nur endliche Größen enthält. Es ist jetzt $\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \bar{v}$ die Elementargeschwindigkeit des Systempunktes $(\bar{x})$ in seiner Bahn, $\frac{d\bar{c}}{d\tau}$ die augenblickliche Translationsgeschwindigkeit des Systems und

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} \cdot \bar{\eta} = \bar{\omega}$$

die Winkelgeschwindigkeit desselben.

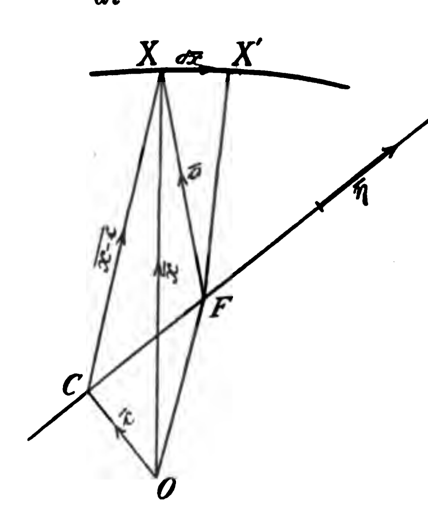


Fig. 67.

Statt der Gleichung (c) kann man also auch schreiben

$$(1) \quad \bar{v} = \frac{d\bar{c}}{d\tau} + \overline{\omega(x-c)}.$$

Diese fundamentale Formel folgt auch unmittelbar aus der geometrischen Anschauung. Denn beachtet man (Fig. 67), daß die Geschwindigkeit des Punktes X die Richtung von $d\bar{x}$ hat und demnach senkrecht auf $\bar{\eta}$ (also auch auf $\bar{\omega}$) und auf $\overline{x-c}$ steht, so muß sie die Richtung von

$$\overline{\omega(x-c)}$$

haben. Der absolute Wert dieser Größe ist

$$\omega \cdot \overline{x-c} \sin(\bar{\omega}/\overline{x-c}).$$

$\overline{x-c}\sin(\bar{\omega}/\overline{x-c})$ ist aber gleich $FX = a$. Folglich wird

$$\overline{\omega(x-c)} = a \cdot \omega.$$

Man hätte also die Gleichung (1) nach dieser Überlegung unmittelbar hinschreiben können.

Denkt man sich die Gleichung (1) für jeden Punkt des beweglichen starren Systems hingeschrieben, so erhält man eine unendliche Mannigfaltigkeit von Größen $\bar{v}$, welche man das „Geschwindigkeitssystem“ des starren Körpers nennt. Gewisse Elemente dieses Geschwindigkeitssystems besitzen besondere Eigenschaften. So kann man z. B. die Frage stellen: Welches ist der Ort aller Punkte des starren Körpers, deren Geschwindigkeiten auf eine durch den Einheitsvektor $\bar{\varepsilon}$ bestimmte Richtung im Raume projiziert eine konstante Größe p ergeben? Jetzt wird

$$\bar{\varepsilon}\,\bar{v} = \bar{\varepsilon}\,\frac{d\bar{c}}{d\tau} + \bar{\varepsilon}\,\overline{\omega(x-c)} = p$$

oder

$$\bar{\omega}\,\overline{\varepsilon(x-c)} = \bar{\varepsilon}\,\frac{d\bar{c}}{d\tau} - p\,.$$

Die Bedingung wird erfüllt durch

$$\overline{x-c} = \overline{e-c} + l\cdot\bar{\varepsilon}\,,$$

entsprechend der Gleichung einer zu $\bar{\varepsilon}$ parallelen Geraden

$$\overline{\varepsilon(x-e)} = 0\,,$$

welche durch den Endpunkt von $\bar{e}$ geht.

Unter dieser Annahme wird die obige Beziehung

$$\bar{\omega}\,\overline{\varepsilon(e-c)} = \bar{\varepsilon}\,\frac{d\bar{c}}{d\tau} - p$$

oder

$$(\overline{\eta\,\varepsilon}\cdot\overline{e-c})\,\omega = \bar{\varepsilon}\,\frac{d\bar{c}}{d\tau} - p\,.$$

Nun ist aber

$$\overline{\eta\,\varepsilon}\cdot\overline{e-c} = k$$

gleich der kürzesten Entfernung der beiden Geraden $\overline{\eta(x-c)} = 0$ und $\overline{\varepsilon(x-e)} = 0$. Folglich wird

$$k = \frac{\bar{\varepsilon}\cdot\dfrac{d\bar{c}}{d\tau} - p}{\omega}\,.$$

Die verlangte Eigenschaft besitzen also diejenigen Geraden des bewegten Systems, deren kürzester Abstand von der

Rotationsachse multipliziert mit der Winkelgeschwindigkeit gleich der Differenz der Projektion der Translationsgeschwindigkeit auf die gegebene Richtung und der Größe p ist.

Aus dieser Betrachtung folgt auch ohne weiteres der Satz:

„Die Geschwindigkeiten aller, in derselben Geraden liegenden Punkte eines starren Systems haben gleiche Projektionen auf diese Gerade.“

117. Momentanzentrum bei der ebenen Bewegung. Bezeichnen wir die Translationsgeschwindigkeit $\frac{d\bar{c}}{d\tau}$ mit $\bar{t}$, so ist

$$\bar{v} = \bar{t} + \overline{\omega(x - c)}\,.$$

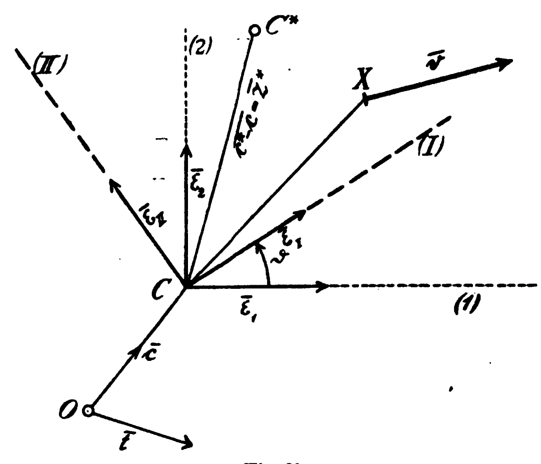


Fig. 68.

Für die Punkte einer in der ruhenden Ebene beweglichen Scheibe steht $\overline{\omega} = \omega \cdot \overline{\eta}$ beständig senkrecht auf dieser Ebene. Wir können also mit Beibehaltung unserer früher benutzten Bezeichnungen $\overline{\eta} = \overline{\varepsilon}_{III}$ setzen, oder auch

$$\overline{\eta} = \overline{\varepsilon_1\,\varepsilon_2} = \overline{\varepsilon_I\,\varepsilon_{II}}\,.$$

Man erkennt nun sofort den Einfluß einer Verlegung des Rotationszentrums C (Fig. 68) nach einem andern Punkte C^* der Ebene aus der Umformung

$$\bar{v} = \bar{t} + \overline{\omega(c^* - c)} + \overline{\omega(x - c^*)}\,.$$

Wenn sich die Scheibe ohne Änderung des Geschwindigkeitssystems seiner Punkte mit der Winkelgeschwindigkeit ω um C^* drehen soll, so muß das System eine andere Translationsgeschwindigkeit, nämlich $t + \overline{\omega(c^* - c)}$ erhalten. Diese wird zu Null, wenn die Beziehung

$$\bar{t} + \overline{\omega(c^* - c)} = 0$$

erfolgt ist. Hieraus kann man den Vektor $\overline{c^* - c} = \bar{z}^*$ entwickeln. Denn es ist

$$\overline{\omega t} + \overline{\omega(\omega z^*)} = 0$$

oder

$$\overline{\omega t} - \omega^2 \cdot \bar{z}^* = 0\,,$$

d. h.

$$\overline{c^* - c} = \bar{z}^* = \frac{1}{\omega^2}\overline{\omega t}\,. \tag{2}$$

Dieser Wahl des Rotationszentrums entsprechend wird

$$\bar{v} = \overline{\omega(x - c^*)} = \overline{\omega(z - z^*)}\,. \tag{3}$$

Man nennt den Punkt C^*, um welchen die Scheibe zur Zeit τ ohne Translation rotiert, das Momentanzentrum. Seine Lage ist durch die Gleichung (2) vollständig bestimmt. Aus der Gleichung (3) ergibt sich sofort eine wichtige Eigenschaft desselben, welche die geometrische Konstruktion in der einfachsten Weise gestattet. Es ist nämlich

$$\overline{x - c^*}\,\bar{v} = 0\,. \tag{4}$$

„Die Verbindungslinie jedes Systempunktes mit dem Momentanzentrum steht also auf der Geschwindigkeit dieses Punktes senkrecht."

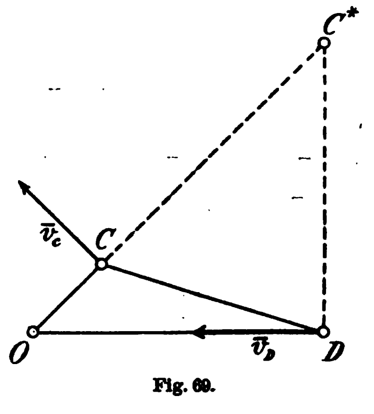


Fig. 69.

Um hiernach das Momentanzentrum für die Bewegung der Lenkstange (Fig. 69) CD zu finden, hat man nur Senkrechte auf $\bar{v}_c$ und $\bar{v}_D$ zu errichten und erhält C^* als Schnittpunkt derselben.

Es genügt also immer die Kenntnis der Bewegungsrichtungen von zwei Punkten des Systems, um das Momentanzentrum konstruieren zu können.

Aus der Gleichung (2) folgt noch die selbstverständliche Beziehung

$$\omega \cdot \bar{z}^* = \bar{t}\,,$$

woraus man erkennt, wie die augenblickliche Translation des Systems von der neuen Rotation um C^* aufgenommen wird.

118. Spurkurve und Polkurve der Momentanzentren. Die lagenbestimmenden Einheitsvektoren $\bar{\varepsilon}_I$, $\bar{\varepsilon}_{II}$ lassen sich durch

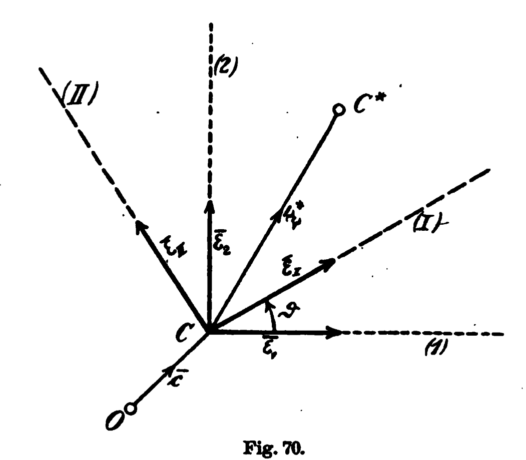


Fig. 70.

die festen Vektoren $\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_2$ und die Amplitude ϑ bei der ebenen Bewegung einfach ausdrücken durch die Gleichungen

(5) $\bar{\varepsilon}_I = \cos\vartheta \cdot \bar{\varepsilon}_1 + \sin\vartheta \cdot \bar{\varepsilon}_2\,, \quad \bar{\varepsilon}_{II} = \cos\vartheta \cdot \bar{\varepsilon}_2 - \sin\vartheta \cdot \bar{\varepsilon}_1\,.$

Für $\bar{z} = \overline{x - c}$ folgt hieraus

$$(6) \qquad \begin{cases} z_I = \cos\vartheta(x_1 - c_1) + \sin\vartheta(x_2 - c_2)\,, \\ z_{II} = \cos\vartheta(x_2 - c_2) - \sin\vartheta(x_1 - c_1)\,. \end{cases}$$

Man kann nun $\bar{z}^*$ sowohl nach den Achsen im ruhenden Raume als auch nach den Achsen in der beweglichen Scheibe zerlegen.

Die Gleichung (2) (Nr. 117) ergibt die erste Zerlegung in der Form

$$(7) \qquad c_1^* - c_1 = -\frac{t_2}{\omega}\,, \quad c_2^* - c_2 = \frac{t_1}{\omega}\,.$$

Faßt man hierin c_1, c_2, t_1, t_2 und ω als Funktionen der Zeit τ auf, dann stellen diese Gleichungen entsprechend dem Zeitverlauf eine Kurve (C_1) in der festen Ebene dar, welche wir die Spurkurve (der Momentanzentren) nennen wollen.

Nach den Gleichungen (5) ist nun ferner

$$z_I^* = \cos\vartheta(c_1^* - c_1) + \sin\vartheta(c_2^* - c_2)\,,$$
$$z_{II}^* = \cos\vartheta(c_2^* - c_2) - \sin\vartheta(c_1^* - c_1)\,,$$

also mit Berücksichtigung von Gleichung (7)

$$z_I^* = -\cos\vartheta\cdot\frac{t_2}{\omega} + \sin\vartheta\cdot\frac{t_1}{\omega}\,,\quad z_{II}^* = \cos\vartheta\cdot\frac{t_1}{\omega} + \sin\vartheta\frac{t_2}{\omega}$$

oder

$$z_I^* = -\frac{t_{II}}{\omega}\,,\quad z_{II}^* = \frac{t_I}{\omega}\,, \tag{8}$$

wo also

$$t_I = \cos\vartheta\cdot t_1 + \sin\vartheta\cdot t_2\,,\quad t_{II} = \cos\vartheta\cdot t_2 - \sin\vartheta\cdot t_1 \tag{9}$$

zu nehmen ist.

Betrachtet man jetzt in den Gleichungen (8) t_I, t_{II} und ω als Funktionen der Zeit τ, dann stellen sie die Gleichungen einer Kurve (C_I) dar, welche mit der beweglichen Scheibe fest verbunden ist. Wir nennen sie die Polkurve (der Momentanzentren). Sie rollt während der Bewegung des Systems von der Spurkurve ab. Man vergleiche Nr. 152.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, daß man bei zwangsläufiger Führung der Scheibe in den Gleichungen (7) und (8) statt der Zeit (τ) auch einen beliebigen geometrischen Parameter (z. B. den Kurbelwinkel in Fig. 69) wählen kann.

119. Geschwindigkeit einer Schraubung. Im allgemeinen hat die Translationsgeschwindigkeit $\bar{t}$ in der Grundgleichung

$$\bar{v} = \bar{t} + \overline{\omega(x-c)}$$

eine beliebige Richtung im Raume. Wird aber im besonderen Falle

$$\bar{v} = t\cdot\bar{\eta} + \overline{\omega(x-c)}\,, \tag{10}$$

so stellt $\bar{v}$ die Geschwindigkeit einer Schraubenbewegung dar. Aus der Beziehung

$$\bar{\eta}\,\bar{v} = t$$

geht hervor, daß die Translationsgeschwindigkeit die Projektion der Elementargeschwindigkeit $(\bar{v})$ auf die Schraubenachse ist.

Ferner folgt aus Gleichung (10)

$$v^2 = t^2 + \omega^2 \cdot \overline{\eta(x - c)}^2 .$$

Hierin ist aber

$$r = \overline{\eta(x - c)}$$

der Abstand des Systempunktes X von der Schraubenachse. Es wird also

$$v^2 = t^2 + (r\,\omega)^2. \tag{11}$$

120. Zentralachse eines Geschwindigkeitssystems. Die Frage, ob ein allgemeines Geschwindigkeitssystem momentan durch die Geschwindigkeit einer Schraubung um eine zur ursprünglichen Rotationsachse parallele Achse ersetzbar ist, läßt sich sofort aus der Grundgleichung

$$\bar{v} = \bar{t} + \overline{\omega(x - c)}$$

beantworten. Denn bringen wir dieselbe in die Form

$$\bar{v} = \bar{t} + \overline{\omega(c' - c)} + \overline{\omega(x - c')} ,$$

so muß

$$\bar{t} + \overline{\omega(c' - c)} = p \cdot \bar{\omega}$$

sein, wenn $p \cdot \bar{\omega}$ die Translationsgeschwindigkeit der gesuchten Schraubung bedeutet. Es folgt zunächst zur Bestimmung des Parameters p die Beziehung

$$\omega^2 \cdot p = \bar{t}\,\bar{\omega}$$

und darauf

$$\overline{\omega\, t} + \overline{\omega\,[\omega(c' - c)]} = 0$$

oder

$$\overline{\omega\, t} + (\bar{\omega}\,\overline{c' - c}) \cdot \bar{\omega} - \omega^2 \cdot \overline{c' - c} = 0 .$$

Setzt man jetzt

$$\overline{\omega\, t} = \omega^2 \cdot \overline{e - c} , \tag{12}$$

so wird

$$\omega^2 \cdot \overline{\omega(c' - e)} = 0 .$$

Die Punkte, nach welchen der ursprüngliche Rotationspunkt C verschoben werden muß, um eine äquivalente Schraubengeschwindigkeit zu erlangen, liegen also auf der Geraden

$$\overline{\eta(c' - e)} = 0 , \tag{13}$$

welche die Zentralachse*) oder Schraubenachse des Geschwindigkeitssystems genannt wird. Sie geht durch den Endpunkt von $\bar{e}$, dessen Richtung und Länge aus der Gleichung (12) eindeutig gefunden werden kann.

Konstruktiv ergibt sich die Zentralachse nach Gleichung (12) ebenso einfach. Man zieht durch den Punkt C eine Gerade, welche senkrecht auf der ursprünglichen Rotationsachse und auf der Translationsgeschwindigkeit des starren Systems steht und trägt darauf im positiven Sinne die Strecke $\frac{t \sin(\overline{\eta}/\bar{t})}{\omega}$ ab. Durch den Endpunkt dieser Strecke zieht man eine Parallele zur gegebenen Rotationsachse.

Während der Bewegung des starren Körpers ändert die Zentralachse im allgemeinen beständig ihre Lage ganz analog wie das Momentanzentrum bei der ebenen Bewegung. Dementsprechend kann man die Lagen der Zentralachsen sowohl im ruhenden Raume als auch in dem beweglichen System verfolgen. Für die Mechanik haben derartige Untersuchungen aber nur in einfachen, geometrisch übersichtlichen Fällen einen greifbaren Wert, auf die wir später eingehen werden.

121. Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit aus den Bahngeschwindigkeiten von drei Punkten des Systems. In der Formel für das allgemeine Geschwindigkeitssystem

$$\text{(a)} \qquad \bar{v} = p \cdot \overline{\omega} + \overline{\omega(x - e)}$$

entsprechend der Schraubenauffassung wollen wir jetzt die Größen p, $\overline{\omega}$ und $\bar{e}$ bestimmen, wenn $\bar{v}$ für drei Punkte $\bar{x}', \bar{x}'', \bar{x}'''$ des starren Körpers bekannt ist. Wir beginnen mit der Berechnung von $\overline{\omega}$ aus den drei Gleichungen

$$\text{(b)} \qquad \begin{cases} \bar{v}' = p \cdot \overline{\omega} + \overline{\omega(x' - e)}, \\ \bar{v}'' = p \cdot \overline{\omega} + \overline{\omega(x'' - e)}, \\ \bar{v}''' = p \cdot \overline{\omega} + \overline{\omega(x''' - e)}. \end{cases}$$

Hieraus gewinnt man sofort die Beziehungen

$$\text{(c)} \qquad \begin{cases} \overline{v'' - v'} = \overline{\omega(x'' - x')}, \quad \overline{v''' - v''} = \overline{\omega(x''' - x'')}, \\ \overline{v' - v'''} = \overline{\omega(x' - x''')}. \end{cases}$$

*) Schell gebraucht die Bezeichnung Windungsachse.

Es müssen also, damit die Aufgabe lösbar sei, die Bedingungen

$$\text{(d)}\qquad \begin{cases} \overline{v''-v'}\cdot\overline{x''-x'}=0\,, \quad \overline{v'''-v''}\cdot\overline{x'''-x''}=0\,, \\ \overline{v'-v'''}\cdot\overline{x'-x'''}=0 \end{cases}$$

erfüllt sein. Ferner erkennt man, daß

$$\text{(e)}\qquad \overline{\omega}=\mathfrak{F}\cdot\overline{(v''-v')(v'''-v'')}$$

sein muß. Es bleibt demnach nur der Faktor $\mathfrak{F}$ zu bestimmen. Dies kann durch Benutzung der Gleichung (c) geschehen. Die erste derselben gibt

$$\overline{v''-v'}=\mathfrak{F}\cdot\overline{[(v''-v')(v'''-v'')](x''-x')}$$

oder nach der Entwicklungsformel und mit Rücksicht auf die Gleichung (d):

$$\overline{v''-v'}=-\mathfrak{F}\cdot(\overline{v'''-v''}\cdot\overline{x''-x'})\cdot\overline{v''-v'}\,.$$

Folglich wird

$$\mathfrak{F}=-\frac{1}{\overline{x''-x'}\;\overline{v'''-v''}}\,.$$

Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit ist also vollständig bestimmt durch die Formel

$$\text{(13)}\qquad \overline{\omega}=-\frac{\overline{(v''-v')(v'''-v'')}}{\overline{x''-x'}\cdot\overline{v'''-v''}}\,.$$

Man kann noch andere Ausdrücke für $\overline{\omega}$ aufstellen, die bei den Anwendungen als Kontrollformeln dienen. Gegenwärtig mag die eben abgeleitete Form genügen.

Zerlegt man $\overline{\omega}$ aus Gleichung (13) in rechtwinklige Komponenten ω_1, ω_2, ω_3 nach dem ruhenden Achsenkreuz, so erhält man für die Richtung der Rotationsachse die Ausdrücke

$$\eta_1=\frac{\omega_1}{\omega}\,,\quad \eta_2=\frac{\omega_2}{\omega}\,,\quad \eta_3=\frac{\omega_3}{\omega}\,,$$

wo

$$\omega^2=\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2$$

ist. Es bleibt also nur noch die Lage der Zentralachse und der Parameter p der zugehörigen Schraubung zu bestimmen. Die letztere Größe folgt sofort aus irgend einer der Gleichungen (b) z. B.

$$\text{(14)}\qquad \overline{\omega}\,\overline{v'}=p\cdot\omega^2\,.$$

Die folgende konstruktive Lagenbestimmung der Schraubenachse hat Poncelet*) mit Benutzung der Projektionsmethode durchgeführt.

122. Orthogonale Projektion. Wir legen die Bildebene durch den Anfangspunkt O der Vektoren (Fig. 71) und bezeichnen den Einheitsvektor ihrer Normalen mit $\bar{\eta}$. Die Gleichung der Bildebene ist dann

$$\bar{\eta}\,\bar{z} = 0\,.$$

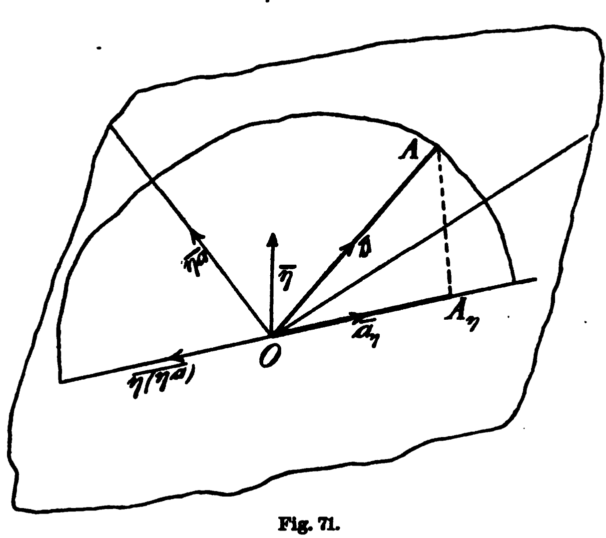


Fig. 71.

Aus der Anschauung folgt sofort, daß zwischen einem Vektor $\overline{OA} = \bar{a}$ und seiner orthogonalen Projektion $\overline{OA}_\eta = \bar{a}_\eta$ auf die angenommene Bildebene die einfache Beziehung

$$\bar{a}_\eta = -\overline{\eta(\eta\,a)} \tag{15}$$

besteht.

Es ist also auch

$$\overline{(a+b)}_\eta = \bar{a}_\eta + \bar{b}_\eta \tag{a}$$

und

$$a_\eta = a \cdot \sin(\bar{a}/\bar{\eta})\,, \tag{b}$$

*) Dieselbe Aufgabe wurde in gleicher Weise später von Chasles gelöst.

sowie

(c) $$\overline{(\eta\, a)}_\eta = \overline{\eta\, a}\,,$$

wo immer die Projektion durch den Index η angedeutet ist. Durch Benutzung der Gleichung (14) kann man alle elementaren Eigenschaften der orthogonalen Projektionen analytisch entwickeln.

Ist z. B. der durch den Einheitsvektor $\bar{\varepsilon}$ orientierte Kreis

$$\bar{x} = \bar{a}\cos\vartheta + \overline{\varepsilon\, a}\sin\vartheta$$

auf die Ebene mit der Normalen $\bar{\eta}$ zu projizieren, so ergibt die Gleichung (15) sofort

$$\bar{x}_\eta = \bar{a}_\eta \cdot \cos\vartheta + [\overline{\varepsilon\, a} - (\bar{\eta} \cdot \overline{\varepsilon\, a}) \cdot \bar{\eta}]\sin\vartheta\,.$$

Legen wir $\bar{a}$ in die Schnittlinie der Kreisebene mit der Bildebene, dann wird $\bar{a}_\eta = \bar{a}$ und

$$\bar{x}_\eta = \bar{a}\cos\vartheta + \overline{\eta\, a} \cdot \cos\gamma\sin\vartheta\,,$$

wenn der Winkel zwischen $\bar{\eta}$ und $\bar{\varepsilon}$ (Neigungswinkel) mit γ bezeichnet wird.

123. Poncelets Konstruktion der Zentralachse. Unsere Grundgleichung

$$\bar{v} = p \cdot \bar{\omega} + \overline{\omega(x - e)}$$

zeigt unmittelbar, daß

$$\overline{\omega\, v} = \overline{\omega\,[\omega(x - e)]}$$

ist, also auch

$$\overline{\eta\, v} = \omega \cdot \overline{\eta\,[\eta(x - e)]}\,,$$

wenn wir zum Einheitsvektor der Achse übergehen.
Wählen wir nun die Ebene durch die Endpunkte der Strecken $\bar{x}' + \bar{v}'$, $\bar{x}'' + \bar{v}''$ und $\bar{x}''' + \bar{v}'''$ zur Bildebene, so enthält dieselbe offenbar die Strecken $\overline{v'' - v'}$ und $\overline{v''' - v''}$. Nach Gleichung (13) in Nr. 121 steht diese Ebene demnach senkrecht auf der Zentralachse und der Übergang zur Projektion ergibt nach der bisherigen Bezeichnung die Gleichung:

$$\bar{v}_\eta = \omega \cdot \overline{[\eta(x - e)]}_\eta$$

oder nach Gleichung (c) in Nr. 122

$$\bar{v}_\eta = \omega \cdot \overline{\eta(x - e)}\,.$$

Hieraus folgt

$$\overline{\eta\, v_\eta} = \omega \cdot \overline{\eta\,[\eta(x - e)]}\,,$$

d. h.

$$\overline{\eta v_\eta} = \omega \cdot \overline{x_\eta - e_\eta}\,,$$

mithin auch

$$\bar{v}_\eta \cdot \overline{x_\eta - e_\eta} = 0\,.$$

Dies ist aber die Gleichung einer Geraden in der Bildebene, welche senkrecht zu $\bar{v}_\eta$ steht und durch den Punkt $\bar{x}_\eta$ geht. Beziehen wir also diese Eigenschaft auf zwei der gegebenen Punkte X', X'' und ihre Geschwindigkeiten $\bar{v}'$ und $\bar{v}''$, so stellt sich der Vektor $\bar{e}_\eta$ des Durchstichpunktes der Zentralachse mit der gewählten Bildebene als Schnitt der Bildgeraden

$$\overline{v'_\eta} \cdot \overline{x'_\eta - e_\eta} = 0 \quad \text{und} \quad \overline{v''_\eta} \cdot \overline{x''_\eta - e_\eta} = 0$$

dar. Um also diesen Durchstichpunkt E_η zu konstruieren, hat man nur die Geschwindigkeiten $\bar{v}'$, $\bar{v}''$ in ihrer natürlichen Lage auf die Ebene (Fig. 72), welche durch die Endpunkte der von einem beliebigen Systempunkte aufgetragenen Strecken $OV' = \bar{v}'$, $OV'' = \bar{v}''$, $OV''' = \bar{v}'''$ geht, zu projizieren und durch die Bildpunkte X'_η, X''_η der Systempunkte X', X'' Senkrechte zu diesen Projektionen $(X'_\eta V'_\eta,\ X''_\eta V''_\eta)$ zu ziehen und ihren Schnittpunkt zu bestimmen.

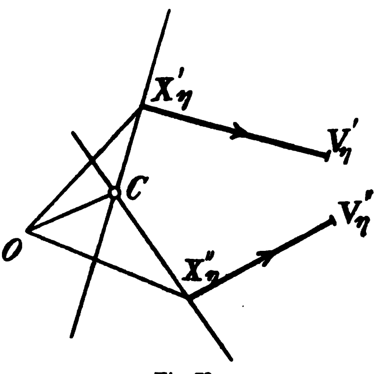


Fig. 72.

124. Kinematische Bedeutung des linearen Komplexes. Durch jeden Punkt $(\bar{a})$ eines starren Systems gehen unendlich viele Geraden von der Gleichung

(a) $$\overline{\varepsilon(x - a)} = 0\,,$$

die allen möglichen Richtungen des Einheitsvektors $\bar{\varepsilon}$ entsprechen. Wir wollen nun aus der Mannigfaltigkeit aller Systemgeraden diejenigen ausscheiden und zu einer besonderen Gruppe zusammenfassen, welche die Eigenschaft besitzen, daß die Geschwindigkeit $(\bar{v})$ jedes ihrer Punkte auf der Geraden senkrecht steht. Das allgemeine Ge-

schwindigkeitssystem denken wir uns in der Form

(b) $$\bar{v} = \bar{t} + \overline{\omega x}$$

dargestellt. Unsere Bedingung verlangt dann, daß

$$\bar{\varepsilon}\bar{v} = \bar{\varepsilon}\bar{t} + \bar{\varepsilon}\,\overline{\omega x} = 0$$

wird. Die Anwendung der Vertauschungsformel gibt

$$\bar{\varepsilon}\bar{t} - \bar{\omega}\,\overline{\varepsilon x} = 0\,.$$

Setzen wir also in Gleichung (a) $\overline{\varepsilon a} = \bar{e}$, so wird

(16) $$\bar{\varepsilon}\bar{t} - \bar{\omega}\bar{e} = 0\,.$$

Alle Geraden des Systems, deren Plückersche Vektoren $\bar{\varepsilon}$ und $\bar{e}$ für ein willkürlich gegebenes Vektorenpaar $\bar{t}$ und $\bar{\omega}$ dieser Bedingung genügen, haben die verlangte Eigenschaft. Ihre Gesamtheit bezeichnet man nach Plücker als einen „lineären Komplex" von Geraden: Die Gleichung (14) definiert also den Komplex vollständig, wenn man noch beachtet, daß

$$\bar{\varepsilon}\bar{e} = 0$$

sein muß.

Möbius*) hat die Gleichung (16) in einer Weise gedeutet, daß dieselbe die Quelle sehr schöner geometrischer Resultate wurde, von denen wir im folgenden die für die Kinematik des starren Körpers wichtigsten mitteilen wollen.

125. Nullpunkt und Nullebene. Möbius nennt jede Gerade

$$\overline{\varepsilon(x - a)} = 0\,,$$

welche dem Komplex $(\bar{t}, \bar{\omega})$ angehört, also nach Gleichung (16) der Bedingung

$$\bar{\varepsilon}\bar{t} - \bar{\omega}\,\overline{\varepsilon a} = 0$$

genügt, eine „Nulllinie". Bezeichnen wir nun mit $\mathfrak{l}$ eine ungerichtete Größe, so ist

$$\bar{\varepsilon} = \mathfrak{l}\cdot\overline{x - a}\,.$$

Folglich geht die Gleichung (16) über in

$$\mathfrak{l}\cdot\bar{t}\cdot\overline{x - a} - \mathfrak{l}\cdot\bar{\omega}\,\overline{x a} = 0$$

oder

(17) $$\bar{t}\,\overline{x - a} + \overline{\omega a}\cdot\bar{x} = 0\,.$$

---

*) Lehrbuch der Statik. 1837. Bd. 1.

Dies ist aber die Gleichung einer Ebene, welche durch den Endpunkt von $\bar a$ geht. Jedem Punkte ($\bar a$) des Raumes („Nullpunkt“) läßt sich also eindeutig eine ihn enthaltende Ebene — die „Nullebene“ — zuordnen. Umgekehrt kann man nach Gleichung (17) zu jeder Ebene den Nullpunkt finden. Auch gilt, wie man ohne weiteres sieht, der Satz:

> *Geht die Nullebene des Punktes A durch einen beliebigen Punkt B, dann geht umgekehrt die Nullebene des Punktes B durch den Punkt A.*

Diese Reziprozität führt zur Konstruktion des Nullpunktes einer gegebenen Ebene.

Bringt man die Gleichung (17) in die Form

$$(\bar t + \overline{\omega a})\,\overline{x - a} = 0\,,$$

so erkennt man, daß sie der unmittelbare Ausdruck unserer kinematischen Bedingung

$$\bar v_a\,\overline{x - a} = 0\,, \quad \bar v_a = \bar t + \overline{\omega a}$$

oder auch

$$\bar v_x\,\overline{x - a} = 0\,, \quad \bar v_x = \bar t + \overline{\omega x}$$

ist.

126. Konjugierte Geraden. Wir wollen nun zu jedem Punkte einer gegebenen Geraden

(a) $$\overline{\eta'(z - c')} = 0\,,$$

welche dem Komplex $(\bar t, \bar\omega)$ nicht angehört, nach der Gleichung (17) die zugehörige Nullebene konstruieren.

Diese Schar von Ebenen

$$(\bar t + \overline{\omega x})\cdot\overline{x - z} = 0$$

bestimmt eine zweite Gerade im Raume, welche als die „Konjugierte“ zu der gegebenen Geraden bezeichnet wird.

Aus Gleichung (a) folgt

$$\bar z = \bar c' + l\cdot\bar\eta'\,,$$

so daß man aus der Gleichung

(b) $$(\bar t + \overline{\omega x})(\overline{x - c'} - l\cdot\bar\eta') = 0$$

alle Nullebenen erhält, indem man l die Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen läßt.

Es seien nun m und n zwei beliebige Werte des laufenden Parameters l. Dann folgt aus

$$(\bar{t} + \overline{\omega x})(\overline{x - c'} - m \cdot \overline{\eta'}) = 0$$

und

$$(\bar{t} + \overline{\omega x})(\overline{x - c'} - n \cdot \overline{\eta'}) = 0$$

$$\bar{t} + \overline{\omega x} = \mathfrak{l}\,\overline{[(x - c') - m \cdot \eta'][(x - c') - n \cdot \eta']}\,,$$

d. h.

$$\bar{t} + \overline{\omega x} = \mathfrak{l}(n - m) \cdot \overline{\eta'(x - c')}\,,$$

wo $\mathfrak{l}$ eine ungerichtete Größe bedeutet.

Wir setzen zur Abkürzung

$$\mathfrak{l}(n - m) = \lambda'$$

und erhalten

$$\text{(c)} \qquad \overline{\omega x} - \lambda' \cdot \overline{\eta' x} + \bar{t} + \lambda' \cdot \overline{\eta' c'} = 0\,.$$

Dies ist die Gleichung des Durchschnittes der beiden aus der Schar (b) willkürlich herausgegriffenen Nullebenen. Zur Bestimmung des Faktors λ' benutzen wir die aus (c) folgende Beziehung

$$(\overline{\omega} - \lambda' \cdot \overline{\eta'})(\bar{t} + \lambda' \cdot \overline{\eta' c'}) = 0$$

oder nach Anwendung der Vertauschungsformel

$$\overline{\omega}\,\bar{t} - \lambda' \cdot (\bar{t} + \overline{\omega c'})\,\overline{\eta'} = 0\,.$$

Hieraus folgt

$$\text{(18)} \qquad \lambda' = \frac{\overline{\omega}\,\bar{t}}{(\bar{t} + \overline{\omega c'})\,\overline{\eta'}}\,.$$

Die Schnittgerade von zwei beliebigen Nullebenen ist also von der Lage der entsprechenden Nullpunkte in der Geraden

$$\overline{\eta'(z - c')} = 0$$

unabhängig. Demnach schneiden sich alle zu den Punkten dieser Geraden zugehörigen Nullebenen in einer einzigen Geraden

$$\text{(19)} \qquad \overline{\omega'' x} + \bar{t} + \overline{\omega' c'} = 0\,,$$

wo zur Abkürzung

$$\text{(20)} \qquad \lambda' \cdot \overline{\eta'} = \overline{\omega}', \quad \overline{\omega}'' = \overline{\omega} - \overline{\omega}'$$

gesetzt ist. Die zu (a) konjugierte Gerade ist hiermit vollständig bestimmt.

Überhaupt sind zwei Geraden

$$\overline{\omega'(x-c')} = 0\,, \quad \overline{\omega''(x-c'')} = 0$$

in Hinsicht auf die Vektoren $\bar{t}$, $\bar{\omega}$ zueinander konjugiert, wenn nach den Gleichungen (19) und (20) die Beziehungen

$$(21)\qquad \begin{cases} \bar{\omega}' + \bar{\omega}'' = \bar{\omega} \\ \overline{\omega' c'} + \overline{\omega'' c''} = -\bar{t} \end{cases}$$

bestehen.

127. Orthogonale Projektion einer Geraden. Um die Raumgerade

$$\overline{\varepsilon(x-a)} = 0$$

auf die Bildebene

$$\overline{\eta\, \mathfrak{z}} = 0$$

zu projizieren, bilden wir nach Nr. 122 die Größen

$$\bar{\varepsilon}_\eta = -\overline{\eta(\eta\,\varepsilon)} \quad \text{und} \quad \bar{a}_\eta = -\overline{\eta(\eta\, a)}$$

und erhalten dann zunächst die Gleichung der projizierten Geraden in der Form

$$(22)\qquad \overline{\eta\,\varepsilon_\eta} \cdot \overline{x_\eta - a_\eta} = 0\,.$$

Nun ist aber

$$\bar{\varepsilon}_\eta = -(\overline{\eta\,\varepsilon}) \cdot \bar{\eta} + \bar{\varepsilon}$$

und infolgedessen

$$\overline{\eta\,\varepsilon_\eta} = \overline{\eta\,\varepsilon}\,.$$

Endlich wird

$$\overline{\eta\,\varepsilon_\eta} \cdot \bar{a}_\eta = \overline{\eta\,\varepsilon_\eta} \cdot \bar{a} = \overline{\eta\,\varepsilon} \cdot \bar{a}\,,$$

so daß man der Gleichung (22) auch die folgende Form geben kann

$$(23)\qquad \overline{\eta\,\varepsilon} \cdot \overline{x_\eta - a} = 0\,.$$

Hier liegen aber nicht mehr alle Vektoren in der Bildebene.

128. Lage der Zentralachse zu den konjugierten Achsen. Wir legen jetzt den Anfang (O) der Vektoren in die Zentralachse, so daß die Gleichung derselben

$$\overline{\eta\, x} = 0$$

wird. Die konjugierten Achsen sind dargestellt durch

$$\overline{\omega'(x-e')} = 0\,, \quad \overline{\omega''(x-e'')} = 0$$

und es müssen die Beziehungen bestehen

$$\text{(a)}\qquad \begin{cases} \bar\omega' + \bar\omega'' = \bar\omega \\ \overline{\omega' e'} + \overline{\omega'' e''} = -p\cdot\bar\omega\,, \end{cases}$$

weil jetzt $\bar t = p\cdot\bar\omega$ zu setzen ist.

Wir bezeichnen nun die kürzesten Abstände zwischen der Zentralachse ($\bar\omega$) und den beiden konjugierten Achsen ($\bar\omega'$ und $\bar\omega''$) mit $\bar k'$ und $\bar k''$. Der kürzeste Abstand zwischen den konjugierten Achsen selbst sei $\bar k$. Jetzt ist nach Nr. 22

$$\text{(b)}\qquad \begin{cases} \overline{\omega\,\omega'}^2\cdot\bar k' = (\bar\omega\,\overline{\omega' e'})\cdot\overline{\omega\,\omega'}\,, \\ \overline{\omega''\omega}^2\cdot\bar k'' = (\bar\omega\,\overline{\omega'' e''})\cdot\overline{\omega''\omega}\,, \\ \overline{\omega'\omega''}^2\cdot\bar k = (\bar\omega'\cdot\overline{\omega'' e''} + \bar\omega''\cdot\overline{\omega' e'})\cdot\overline{\omega'\omega''}. \end{cases}$$

Nach den Gleichungen (a) ist aber

$$\overline{\omega''\omega} = \overline{\omega\,\omega'} \quad \text{und} \quad \bar\omega'\cdot\overline{\omega'' e''} + \bar\omega''\cdot\overline{\omega' e'} = -p\,\omega^2.$$

Hiernach wird

$$\text{(c)}\qquad \begin{cases} \overline{\omega\,\omega'}^2\cdot\bar k' = (\bar\omega''\,\overline{\omega' e'})\cdot\overline{\omega\,\omega'}\,, \\ \overline{\omega\,\omega'}^2\cdot\bar k'' = (\bar\omega'\,\overline{\omega'' e''})\cdot\overline{\omega\,\omega'}\,, \\ \overline{\omega\,\omega'}^2\cdot\bar k = p\,\omega^2\cdot\overline{\omega\,\omega'}\,, \end{cases}$$

d. h.

$$k' + k'' = k\,.$$

Unsere drei Achsen liegen also in zueinander parallelen Ebenen. Man kann aber auch zeigen, daß die Zentralachse den kürzesten Abstand der beiden zugehörigen konjugierten Achsen durchschneidet. Zu diesem Zwecke projizieren wir das ganze Liniengebilde auf eine Bildebene, die zu den Achsen $\bar\omega'$ und $\bar\omega''$ parallel ist. Ihr Lotvektor hat dann die Richtung von $\overline{\omega'\omega''}$ oder, was dasselbe ist, von $\overline{\omega'\omega} = \bar\nu\cdot\lceil\omega'\omega\rceil$ und die Bildgeraden sind bestimmt durch die Gleichungen:

$$\overline{(\omega'\omega)\,\omega}\cdot\bar x_\nu = 0\,, \quad \overline{(\omega'\omega)\,\omega'}\cdot\overline{x_\nu - e'_\nu} = 0\,, \quad \overline{(\omega'\omega)\,\omega''}\cdot\overline{x_\nu - e''_\nu} = 0\,.$$

Drei in einer Ebene liegende Geraden mit den Gleichungen

$$\bar\alpha\,\bar x = a\,, \quad \bar\alpha'\bar x = a'\,, \quad \bar\alpha''\bar x = a''$$

schneiden sich aber in einem Punkte, wenn die Bedingung

$$(24)\qquad a\cdot\overline{\alpha'\alpha''}+a'\cdot\overline{\alpha''\alpha}+a''\cdot\overline{\alpha\,\alpha'}=0$$

erfüllt ist, wie der Leser sofort zeigen kann.

In unserem Falle reduziert sich die Bedingungsgleichung auf

$$\overline{(\omega'\omega)\,\omega'}\cdot\bar e'+\overline{(\omega'\omega)\,\omega''}\cdot\bar e''=0\,.$$

Diese ist aber in der Tat erfüllt. Denn man hat

$$\overline{(\omega'\omega)\,\omega'}\cdot\bar e'+\overline{(\omega'\omega)\omega''}\cdot\bar e''=\overline{\omega'\omega}(\overline{\omega'e'}+\overline{\omega''e''})=-p(\overline{\omega'\omega}\cdot\bar\omega)=0\,.$$

Die Zentralachse durchschneidet also den kürzesten Abstand der konjugierten Achsen rechtwinklig.

Das Teilverhältnis ergibt sich ohne weiteres aus den Gleichungen (c). Man erhält

$$\frac{k'}{k''}=\frac{\bar\omega''\overline{\omega'e'}}{\bar\omega'\overline{\omega''e''}}=\frac{\bar\omega''\bar\omega}{\bar\omega'\bar\omega}$$

oder wenn der Winkel, welchen die konjugierten Geraden miteinander einschließen, durch γ bezeichnet wird:

$$(25)\qquad \frac{k'}{k''}=\frac{\omega''}{\omega'}\,\frac{\omega''+\omega'\cos\gamma}{\omega'+\omega''\cos\gamma}\,.$$

Bei der Ausrechnung ist nach den Gleichungen (18) und (20)

$$\omega'=\frac{p\cdot\omega^2}{(p\,\bar\omega+\overline{\omega\,e'})\cdot\bar\eta'}\ -$$

zu setzen.

129. Zusammensetzung von Winkelgeschwindigkeiten um konvergente Achsen. Man könnte auch hier unmittelbar den Grenzübergang aus der entsprechenden Untersuchung über endliche Drehungen (Nr. 112) machen. Wir ziehen es jedoch vor, die Aufgabe direkt zu lösen.

Irgend ein Punkt $(\bar x)$ des Systems gehe infolge der Rotation $\overline{d\vartheta'}$ in $\bar x'$ über. Dann ist, wenn wir einen Punkt dieser ersten Rotationsachse zum Bezugspunkt (O) wählen:

$$\bar x'=\bar x+\overline{d\vartheta'x}$$

und der zweiten darauffolgenden Rotation $\overline{d\vartheta''}$ entspricht die Gleichung

$$\bar x''=\bar x'+\overline{d\vartheta''x'}\,.$$

Nun soll $\overline{d\vartheta}$ eine zu diesen beiden Drehungen äquivalente Drehung sein. Also muß

$$\bar{x}'' = \bar{x} + \overline{d\vartheta\, x}$$

sein. Die Gleichung

$$\bar{x} + \overline{d\vartheta\, x} = \bar{x} + \overline{d\vartheta'\, x} + \overline{d\vartheta''\,[x + (d\vartheta'\, x)]}$$

muß daher für jeden Wert von $\bar{x}$ erfüllt sein. Dies ist aber der Fall, wenn wir mit Vernachlässigung der unendlich kleinen Größe zweiter Ordnung

$$\overline{d\vartheta} = \overline{d\vartheta'} + \overline{d\vartheta''}.$$

Der Übergang zu den Vektoren der entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten gibt

$$\frac{\overline{d\vartheta}}{d\tau} = \frac{\overline{d\vartheta'}}{d\tau} + \frac{\overline{d\vartheta''}}{d\tau} \tag{26}$$

oder in der üblichen Bezeichnung

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}' + \bar{\omega}''. \tag{27}$$

Bei Drehungen um konvergente Achsen ist die resultierende Winkelgeschwindigkeit $(\bar{\omega})$ *die geometrische Summe der gegebenen Winkelgeschwindigkeiten* $(\bar{\omega}', \bar{\omega}'')$.

Dieses Resultat ergibt sich natürlich auch sofort durch Grenzübergang aus der Gleichung (28) in Nr. 112:

$$(1 - \bar{\lambda}'\bar{\lambda}'') \cdot \bar{\lambda} = \bar{\lambda}' + \bar{\lambda}'' - \overline{\lambda'\lambda''},$$

indem wir

$$\bar{\lambda} = \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\, d\vartheta) \cdot \bar{\bar{\eta}} = \tfrac{1}{2}\, \overline{d\vartheta}$$

setzen und die unendlich kleinen Größen zweiter Ordnung vernachlässigen.

130. Zusammensetzung von Winkelgeschwindigkeiten um parallele Achsen. Die erste Rotation $\bar{\eta} \cdot d\vartheta'$ erfolge um die Achse C' (Fig. 73), die zweite Rotation $\bar{\eta} \cdot d\vartheta''$ um die Achse C''. Es gelten also die Gleichungen:

$$\bar{x}' = \bar{x} + d\vartheta' \cdot \overline{\eta(x - c')},$$

$$\bar{x}'' = \bar{x}' + d\vartheta'' \cdot \overline{\eta(x' - c'')}$$

und für die äquivalente Rotation

$$\bar{x}'' = \bar{x} + d\vartheta \cdot \overline{\eta(x - c)}.$$

Hiernach ist die Gleichung der Äquivalenz

$$d\vartheta' \cdot \overline{\eta(x - c')} + d\vartheta'' \cdot \overline{\eta(x - c'')} = d\vartheta \cdot \overline{\eta(x - c)} .$$

Diese wird identisch erfüllt für

(a) $$d\vartheta' + d\vartheta'' = d\vartheta ,$$

(b) $$d\vartheta' \cdot \overline{\eta c'} + d\vartheta'' \cdot \overline{\eta c''} = d\vartheta \cdot \overline{\eta c} .$$

Mithin ist die resultierende Amplitude die algebraische Summe der gegebenen Amplituden.

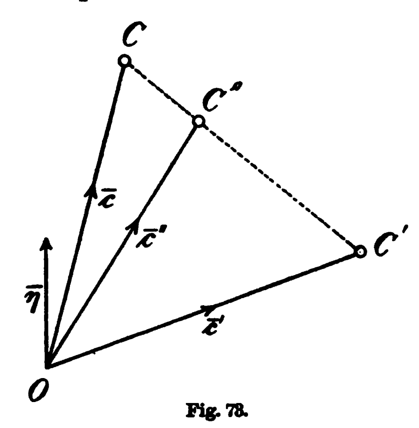


Fig. 78.

Ferner folgt aus Gleichung (b)

(c) $$d\vartheta' \overline{\eta(c' - c)} = d\vartheta'' \cdot \overline{\eta(c - c'')} .$$

C liegt demnach in der Verbindungsgeraden der Punkte C' und C'' und teilt ihren Abstand im umgekehrten Verhältnis der gegebenen Amplituden $d\vartheta'$, $d\vartheta''$.

Für Winkelgeschwindigkeiten gilt also der Satz:

Zwei Winkelgeschwindigkeiten ($\overline{\omega}'$, $\overline{\omega}''$) *um parallele Achsen sind ersetzbar durch eine resultierende Winkelgeschwindigkeit* ($\overline{\omega} = \overline{\omega}' + \overline{\omega}''$) *um eine ebenfalls parallele Achse. Diese teilt den Parallelstreifen der gegebenen Achsen im umgekehrten Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten* ω' *und* ω''. *Die Teilungslinie ist eine innere, wenn* ω' *und* ω'' *gleiche Vorzeichen besitzen und eine äußere bei entgegengesetzten Vorzeichen.*

Der besondere Fall, daß die gegebenen Winkelgeschwindigkeiten ω' und ω'' entgegengesetzt gleich sind, führt auf

eine resultierende Rotationsgeschwindigkeit von verschwindender Größe um eine unendlich entfernte Drehachse.

131. Das Rotationspaar. In dem eben erwähnten Ausnahmefalle ist die Resultierende offenbar eine Translationsgeschwindigkeit. Wir setzen daher

$$\bar{x}'' = \bar{x} + d\bar{a}$$

und erhalten, wie in der vorigen Nummer, wenn wir

$$d\vartheta' = -d\vartheta'' = d\vartheta$$

setzen,

$$d\bar{a} = \overline{\eta(c'' - c')} \cdot d\vartheta$$

oder

(d)
$$\frac{d\bar{a}}{d\tau} = \overline{\eta(c'' - c')} \cdot \frac{d\vartheta}{d\tau} = \bar{t}\,,$$

womit die resultierende Translationsgeschwindigkeit vollständig bestimmt ist.

Nach Gleichung (d) steht $\bar{t}$ senkrecht auf der gemeinsamen Rotationsachse und auch senkrecht auf der kürzesten Verbindung derselben. Ferner ist $t = \overline{c'' - c'} \cdot \frac{d\vartheta}{d\tau}$.

Man nennt die gleichzeitige Verbindung von zwei entgegengesetzt gleichen Winkelgeschwindigkeiten um parallele Achsen kurz ein „Rotationspaar", da eine Verwechslung mit dem entsprechenden Gebilde für endliche Amplituden nicht zu befürchten ist.

Da wir jetzt jede Translationsgeschwindigkeit durch ein Rotationspaar ersetzen können, so erkennt man, daß man das allgemeine Geschwindigkeitssystem am starren Körper als lediglich aus Rotationsgeschwindigkeiten hervorgehend vorstellen kann.

132. Zurückführung eines allgemeinen Geschwindigkeitssystems auf zwei Rotationsgeschwindigkeiten. Ohne Beschränkung können wir den Bezugspunkt der Vektoren in die gegebene Rotationsachse legen. Dann ist die Geschwindigkeit des Systempunktes $(\bar{x})$ bestimmt durch die Gleichung

$$\bar{v} = \bar{t} + \overline{\omega x}\,.$$

Diese Geschwindigkeit soll erzeugt werden aus den beiden Rotationsgeschwindigkeiten $\overline{\omega'(x - c')}$, $\overline{\omega''(x - c'')}$. Es muß also die Relation

$$\bar{t} + \overline{\omega x} = \overline{\omega'(x - c)} + \overline{\omega''(x - c'')}$$

identisch erfüllt sein, woraus die Bedingungsgleichungen

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}' + \overline{\omega}'',$$
$$-\overline{t} = \overline{\omega' c'} + \overline{\omega'' c''}$$

folgen. $\overline{\omega}'$ und $\overline{\omega}''$ sind demnach Winkelgeschwindigkeiten um konjugierte Achsen, die durch die Punkte $(\overline{c}')$ und $(\overline{c}'')$ gehen. Alle Beziehungen, welche wir für konjugierte Geraden entwickelt haben, können ohne weiteres auf den vorliegenden Fall angewendet werden. Ist die erste Achse — bis auf eine gleich anzugebende Beschränkung — willkürlich im starren Körper mit dem Geschwindigkeitssystem $(\overline{t}, \overline{\omega})$ gewählt, dann ist die zweite (konjugierte) Achse vollständig bestimmt. Ebenso kennt man die beiden Rotationsgeschwindigkeiten ω' und ω''.

133. Jede Nulllinie ist sich selbst konjugiert. Wir wollen jetzt eine Nulllinie

$$\overline{\omega'(x - c')} = 0$$

als erste Rotationsachse bei der eben behandelten Zerlegung in konjugierte Rotationen wählen. Dann ist

$$\overline{\omega}'\overline{t} - \overline{\omega} \cdot \overline{\omega' c'} = 0$$

oder

$$-\overline{\omega}'\overline{t} + \overline{\omega}''\overline{\omega' c'} = 0\,.$$

Wegen der Beziehung

$$\overline{t} = -\overline{\omega' c'} - \overline{\omega'' c''}$$

geht aber diese Gleichung über in

$$\overline{\omega}'\overline{\omega'' c''} + \overline{\omega}''\overline{\omega' c'} = 0\,.$$

Der kürzeste Abstand der beiden zueinander konjugierten Achsen ist demnach gleich Null. Hiermit ist bewiesen, daß jede Nulllinie sich selbst konjugiert ist, und daß aus diesem Grunde eine solche Linie nicht als erste Achse für die Zerlegung eines Geschwindigkeitssystems in zwei konjugierte Winkelgeschwindigkeiten genommen werden kann.

134. Relative Bewegung eines Punktes in bezug auf ein starres System. Bereits in Nr. 45 sind wir auf die Vorstellung der relativen Bewegung in einem speziellen Falle eingegangen. Es handelt sich daher jetzt um eine Erweiterung dieser Anschauung, indem das bewegte Bezugssystem als ein starres System in allgemeinster Bewegung angenommen wird.

Die Ortsveränderung des Punktes X (Fig. 74) wird jetzt gleichzeitig auf den ruhenden Raum, welchem das Koordinatenkreuz O_{123} entspricht und auf ein starres System, dessen Bewegung durch die Lagen des Achsenkreuzes $A_{I\,II\,III}$ gekennzeichnet wird, bezogen. Die Geschwindigkeit, wie sie der zeitlichen Änderung des Vektors $\overline{OX} = \bar{x}$ entspricht, wird nach wie vor durch

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \bar{v}$$

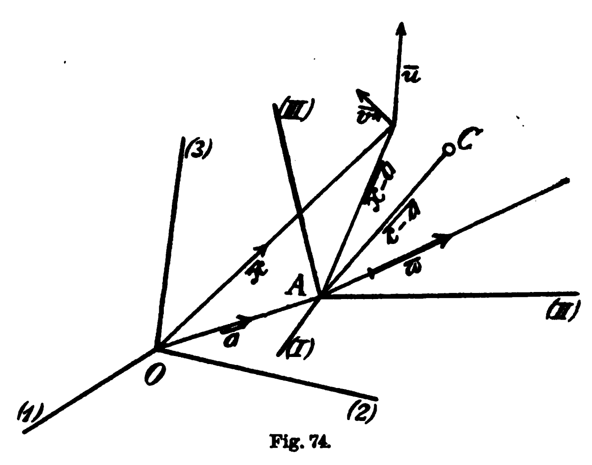


Fig. 74.

dargestellt und als absolute Geschwindigkeit bezeichnet. Derjenige Punkt des bewegten starren Bezugssystems $(A_{I\,II\,III})$, welcher zur Zeit τ mit dem frei (also auch beliebig) beweglichen Punkt X zusammenfällt, hat die Geschwindigkeit

$$\bar{v}^* = \bar{t} + \overline{\omega(x - c)}\,,$$

wenn wir die bisherigen Bezeichnungen beibehalten.

Diese Geschwindigkeit $\bar{v}^*$ nennt man die Führungsgeschwindigkeit des Punktes X. Setzen wir nun

$$\bar{v} = \bar{v}^* + \bar{u}\,,$$

so ist offenbar $\bar{u}$ diejenige Geschwindigkeit von X, welche ein Beobachter unmittelbar messen kann, der mit dem bewegten Raume $A_{I\,II\,III}$ fest verbunden ist. Die andere Komponente $\bar{v}^*$ bleibt ihm so lange verborgen, als er keine

Kenntnis von der Bewegung seines Beobachtungsraumes hat. Gewinnt der Beobachter diese Kenntnis auf irgend eine Weise, dann nennt er die Größe $\bar{v} - \bar{v}^* = \bar{u}$ die relative Geschwindigkeit des Punktes X. Nun ist für den Beobachter in $A_{I\,II\,III}$

$$\bar{u} = \text{Grenze}\ \frac{\overline{s' - s}}{\tau' - \tau} = \text{Grenze}\left(\frac{\overline{x' - a'} - \overline{x - a}}{\tau' - \tau}\right)$$

für eine gegen Null konvergierende Zeitdifferenz $\tau' - \tau$, wobei jedoch $x' - a$ und $\overline{x - a}$ relative Orte im führenden System sind.

Schreiben wir in dieser Auffassung

$$\bar{u} = \frac{\mathfrak{d}\overline{x - a}}{\mathfrak{d}\tau},$$

indem wir ein neues Differentiationssymbol $\mathfrak{d}$ wählen, dann ist $\bar{u}$ die auf die Zeiteinheit bezogene Änderung des Vektors $\overline{x - a}$, insofern nur die Bewegung von X im System $A_{I\,II\,III}$ in Betracht kommt.*)

Bei der relativen Bewegung eines Punktes ist die absolute Geschwindigkeit ($\bar{v}$) gleich der geometrischen Summe der Führungsgeschwindigkeit ($\bar{v}^*$) und seiner relativen Geschwindigkeit ($\bar{u}$).

Mit Benutzung der gewählten Bezeichnungen nimmt die Grundgleichung der relativen Bewegung zunächst die Form

$$\text{(a)}\qquad \frac{d\bar{x}}{d\tau} = \bar{v} = \bar{t} + \overline{\omega(x - c)} + \frac{\mathfrak{d}\overline{x - a}}{\mathfrak{d}\tau}$$

an, und die Rotationsachse $\bar{\bar{\omega}}$ geht bei dieser Anschauung durch einen beliebigen Punkt C des Systems $A_{I\,II\,III}$. Wir wenden jetzt die Gleichung (a) auf den Ursprung (A) des beweglichen Koordinatensystems an und erhalten

$$\text{(b)}\qquad \frac{d\bar{a}}{d\tau} = \bar{t} + \overline{\omega(a - c)}\,.$$

Durch Elimination von $\bar{t}$ und $\bar{c}$ folgt aus den beiden letzten Gleichungen

$$\text{(c)}\qquad \frac{d\bar{x}}{d\tau} = \frac{d\bar{a}}{d\tau} + \overline{\omega(x - a)} + \frac{\mathfrak{d}\overline{x - a}}{\mathfrak{d}\tau}\,.$$

*) Man könnte $\bar{u}$ auch die Geschwindigkeit der Eigenbewegung des Punktes X im führenden System nennen.

Diese Form der Grundgleichung für die relative Bewegung ist bei manchen Untersuchungen bequemer als die Gleichung (a), weshalb sie auch in den Lehrbüchern der Kinematik bevorzugt wird. Selbstverständlich geht die Achse von $\overline{\omega}$ jetzt durch den Punkt A.

Setzen wir noch

$$\overline{x - a} = \overline{z},$$

so folgt aus Gleichung (c) für den Vektor $\overline{z}$ die Beziehung

$$\text{(d)} \qquad \frac{d\overline{z}}{d\tau} = \overline{\omega z} + \frac{\mathfrak{d}\overline{z}}{\mathfrak{d}\tau},$$

also auch im speziellen Falle für den Vektor $\overline{\omega}$:

$$\text{(e)} \qquad \frac{d\overline{\omega}}{ds} = \frac{\mathfrak{d}\overline{\omega}}{\mathfrak{d}\tau}.$$

Die relative Änderung des Rotationsvektors $\overline{\omega}$ ist seiner absoluten Änderung gleich.

Aufgabe 53. Ein Beobachter steht auf einem Karussell, welches sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht. Er verfolgt den senkrechten Fall eines Körpers im Abstande e von der Drehachse. Welches ist die relative Geschwindigkeit der Bewegung?

Aufgabe 54. Man berechne die relative Geschwindigkeit des Mittelpunktes der Lenkstange eines Kurbelmechanismus für einen Beobachter, welcher mit dem Schwungrad fest verbunden ist. Winkelgeschwindigkeit des Kurbelarmes gleich ω.

135. Die Elementarbeschleunigung bei der Bewegung des starren Systems. Nehmen wir zuerst das Geschwindigkeitssystem in der Form

$$\overline{v} = \frac{d\overline{a}}{d\tau} + \overline{\omega(x - a)},$$

welche der Gleichung (c) in Nr. 134 entspricht, so folgt durch Differentiation nach der Zeit τ unmittelbar

$$\overline{w} = \frac{d\overline{v}}{d\tau} = \frac{d^2\overline{a}}{d\tau^2} + \overline{\frac{d\omega}{d\tau}(x - a)} + \overline{\omega\left(v - \frac{da}{d\tau}\right)}$$

oder

$$\text{(a)} \qquad \overline{w} = \frac{d^2\overline{a}}{d\tau^2} + \overline{\frac{d\omega}{d\tau}(x - a)} + \overline{\omega[\omega(x - a)]}$$

für den Vektor der Elementarbeschleunigung. Die konstituierenden Elemente desselben sind

$$\bar{\omega}\,,\quad \frac{d\bar{\omega}}{d\tau} \quad \text{und} \quad \frac{d^2\bar{a}}{d\tau^2}\,,$$

also außer der Winkelgeschwindigkeit die Winkelbeschleunigung und die Beschleunigung des Bezugspunktes A im beweglichen System. Kennt man diese drei Vektoren für einen bestimmten Zeitmoment, so ist nach Gleichung (a) die Beschleunigung eines jeden Systempunktes in diesem Augenblick bestimmbar.

Handelt es sich z. B. um die Beschleunigungen der Punkte der durch A gehenden augenblicklichen Rotationsachse, so hat man

$$\overline{\omega(x-a)} = 0\,,$$

also

$$\overline{x-a} = l\cdot\bar{\omega}\,,$$

wo l der Abstand des laufenden Punktes von A gerechnet ist. Es wird demnach in diesem Falle

$$\bar{w}_\omega = \frac{d^2\bar{a}}{d\tau^2} + l\cdot\overline{\frac{d\omega}{d\tau}\cdot\omega}\,.$$

Hierin kann man noch

$$\bar{\omega} = \omega\cdot\bar{\eta}$$

setzen, so daß

$$\frac{d\bar{\omega}}{d\tau} = \frac{d\omega}{d\tau}\cdot\bar{\eta} + \omega\cdot\frac{d\bar{\eta}}{d\tau}$$

wird. Die Beschleunigungen der einzelnen Punkte der Rotationsachse sind also auch bestimmt durch den Ausdruck

$$\bar{w}_\omega = \frac{d^2\bar{a}}{d\tau^2} + l\cdot\omega^2\cdot\overline{\frac{d\eta}{d\tau}\cdot\eta}\,,$$

welchen man leicht geometrisch interpretieren kann.

Wir wollen nun zweitens das Geschwindigkeitssystem in der kanonischen Form der Schraubung um die Zentralachse zum Ausgangspunkt nehmen, also die Gleichung

$$\bar{v} = p\cdot\bar{\omega} + \overline{\omega(x-e)}$$

nach der Zeit differentiieren. Dann ergibt sich:

$$\overline{w} = p \cdot \frac{d\overline{\omega}}{d\tau} + \overline{\frac{d\omega}{d\tau}(x-e)} + \frac{dp}{d\tau} \cdot \overline{\omega} + \overline{\omega\left(v - \frac{de}{d\tau}\right)}$$

oder

$$\text{(b)} \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{w} = p \cdot \frac{d\overline{\omega}}{d\tau} &+ \overline{\frac{d\omega}{d\tau}(x-e)} + \overline{\omega[\omega(x-e)]} \\ &+ \frac{dp}{d\tau} \cdot \overline{\omega} - \overline{\omega \frac{de}{d\tau}} . \end{aligned} \right.$$

In dieser Formel treten nun außer den oben betrachteten Elementen

$$\overline{\omega}, \quad \frac{d\overline{\omega}}{d\tau}$$

noch die folgenden auf

$$p, \quad \frac{dp}{d\tau}, \quad \overline{e}, \quad \frac{d\overline{e}}{d\tau},$$

indem sich sowohl der Parameter (p) der Schraube als auch die Lage der Schraubenachse selbst mit der Zeit τ ändert.

Trotz dieser Kompliziertheit hat man die Gleichung (b) eingehend diskutiert und weiter verfolgt. Eine ausführliche synthetische Betrachtung findet man in Schells Theorie der Bewegung und der Kräfte, Bd. I, Kap. 15, auf welche wir diejenigen Leser verweisen, welchen die hartnäckige Verfolgung eines mühsamen Weges Freude bereitet.

136. Das Beschleunigungszentrum. Im allgemeinen enthält das in Bewegung begriffene starre System einen einzigen Punkt, dessen Beschleunigung momentan gleich Null ist. Diese Bedingung müßte also ein Punkt ($\overline{x}$) erfüllen, der nach Gleichung (a) in Nr. 135 der Vektorrelation

$$0 = \frac{d^2\overline{a}}{d\tau^2} + \overline{\frac{d\omega}{d\tau}(x-a)} + [\overline{\omega}(\overline{x-a})] \cdot \overline{\omega} - \omega^2 \cdot \overline{x-a}$$

genügt. Aus dieser Gleichung folgt, wenn wir zur Abkürzung

$$\frac{d\overline{\omega}}{d\tau} = \overline{\dot{\omega}} \quad \text{und} \quad \frac{d^2\overline{a}}{d\tau^2} = \overline{\ddot{a}}$$

setzen:

(a) $$\overline{\omega}\,\overline{\ddot{a}} + \overline{\omega\,\dot{\omega}} \cdot \overline{x - a} = 0\,,$$

(b) $$\overline{\dot{\omega}}\,\overline{\ddot{a}} + \overline{(\dot{\omega}\,\omega)\,\omega} \cdot \overline{x - a} = 0\,,$$

(c) $$\overline{\omega\,\dot{\omega}} \cdot \overline{\ddot{a}} + \overline{[(\omega\,\dot{\omega})\,\dot{\omega} - \omega^2 \cdot \overline{\omega\,\dot{\omega}}]} \cdot \overline{(x - a)} = 0\,.$$

Drei Ebenen

$$\overline{\nu}\,\overline{x} = n\,, \quad \overline{\nu'}\,\overline{x} = n'\,, \quad \overline{\nu''}\,\overline{x} = n''$$

schneiden sich in einem Punkte $(\overline{x})$, welcher durch die Gleichung

$$(\overline{\nu\,\nu'} \cdot \overline{\nu''}) \cdot \overline{x} = n \cdot \overline{\nu'\,\nu''} + n' \cdot \overline{\nu''\,\nu} + n'' \cdot \overline{\nu\,\nu'}$$

eindeutig bestimmt ist. Der Schnittpunkt liegt im Endlichen, wenn die Determinante

$$\varDelta = \overline{\nu\,\nu'} \cdot \overline{\nu''}$$

von Null verschieden ist. In unserem Falle wird nach den Gleichungen (a), (b), (c):

$$\varDelta = \overline{(\omega\,\dot{\omega})\,[\omega(\omega\,\dot{\omega})]} \cdot \overline{[(\omega\,\dot{\omega})\,\dot{\omega} - \omega^2 \cdot \overline{\omega\,\dot{\omega}}]}\,,$$

d. h.

$$\varDelta = \overline{\omega\,\dot{\omega}}^{\,4}\,.$$

Im allgemeinen existiert also bei der Bewegung eines starren Systems ein Punkt in demselben, welcher momentan beschleunigungslos ist. Man nennt ihn das „Beschleunigungszentrum" des Systems. Wird

$$\overline{\omega\,\dot{\omega}} = 0\,,$$

so fällt das Beschleunigungszentrum ins Unendliche. Weitere Entwicklungen in Koenigs Leçons de Cinématique. Paris 1897, pag. 134.

137. Einfache Deutung der Elementarbeschleunigung am starren System. Die gerichtete Größe $\overline{v}$ erleidet in bezug auf die Zeiteinheit eine doppelte Änderung*), was durch die Gleichung

$$\frac{d\overline{v}}{d\tau} = \overline{\omega\,v} + \frac{\mathfrak{d}\overline{v}}{\mathfrak{d}\tau}$$

am einfachsten dargestellt wird. Diese Gleichung enthält daher auch die übersichtlichste Darstellung des Vektors der

*) Hier kommt also die Änderung eines Vektors in Betracht, welche durch Gleichung (c) in Nr. 134 ausgedrückt ist.

Elementarbeschleunigung $\overline{w} = \frac{d\overline{v}}{d\tau}$. Aus ihr folgt auch wieder die explizite Formel (Nr. 135), indem wir von

$$\overline{v} = \dot{\overline{a}} + \overline{\omega(x-a)}$$

ausgehend die Operationen $\overline{\omega v}$ und $\frac{\mathfrak{d}\overline{v}}{\mathfrak{d}\tau}$ durchführen. Man erhält

$$\overline{\omega v} = \overline{\omega \dot{a}} + \overline{\omega[\omega(x-a)]}$$

und

$$\frac{\mathfrak{d}\overline{v}}{\mathfrak{d}\tau} = \frac{\mathfrak{d}\dot{\overline{a}}}{\mathfrak{d}\tau} + \overline{\frac{\mathfrak{d}\omega}{\mathfrak{d}\tau}(x-a)},$$

also

$$\overline{w} = \overline{\omega \dot{a}} + \overline{\omega[\omega(x-a)]} + \frac{\mathfrak{d}\dot{\overline{a}}}{\mathfrak{d}\tau} + \overline{\frac{\mathfrak{d}\omega}{\mathfrak{d}\tau}(x-a)}.$$

Nun ist aber

$$\text{(a)} \qquad \frac{d\dot{\overline{a}}}{d\tau} = \overline{\omega \dot{a}} + \frac{\mathfrak{d}\dot{\overline{a}}}{\mathfrak{d}\tau}$$

und mithin, wie in Nr. 135:

$$\text{(b)} \qquad \overline{w} = \frac{d^2\overline{a}}{d\tau^2} + \overline{\omega[\omega(x-a)]} + \overline{\frac{\mathfrak{d}\omega}{\mathfrak{d}\tau}(x-a)}.$$

138. Beschleunigung eines freien, in relativer Bewegung begriffenen Punktes. Hier unterscheidet sich die Betrachtung von der vorangehenden nur durch die Berücksichtigung der relativen Bewegung des Punktes. Es ist also von der allgemeinen Formel

$$\text{(a)} \qquad \frac{d\overline{x}}{d\tau} = \frac{d\overline{a}}{d\tau} + \overline{\omega(x-a)} + \frac{\mathfrak{d}\overline{x-a}}{\mathfrak{d}\tau}$$

auszugehen. Da diese Beziehung für jeden Vektor gilt, so ist auch

$$\overline{w} = \frac{d\overline{v}}{d\tau} = \frac{d\overline{a}}{d\tau} + \overline{\omega(v-u)} + \frac{\mathfrak{d}\overline{v-a}}{\mathfrak{d}\tau}.$$

Setzt man in Gleichung (a) $\overline{x} = 0$, dann wird

$$\frac{d\overline{a}}{d\tau} - \overline{\omega a} - \frac{\mathfrak{d}\overline{a}}{\mathfrak{d}\tau} = 0$$

und man erhält für die Beschleunigung bei der relativen Bewegung die übersichtliche Formel:

$$\text{(b)} \qquad \overline{w} = \overline{\omega v} + \frac{\mathfrak{d}\overline{v}}{\mathfrak{d}\tau},$$

welche man auch sofort hätte hinschreiben können, wenn man die in Nr. 137 benutzten Vorstellung auch hier anwendet. Wir bilden nun

$$\overline{\omega v} = \overline{\omega \dot{a}} + \overline{\omega[\omega(x-a)]} + \overline{\omega \frac{\mathfrak{d}(x-a)}{\mathfrak{d}\tau}}$$

und

$$\frac{\mathfrak{d}\overline{v}}{\mathfrak{d}\tau} = \frac{\mathfrak{d}\bar{\dot{a}}}{\mathfrak{d}\tau} + \overline{\frac{\mathfrak{d}\omega}{\mathfrak{d}\tau}(x-a)} + \overline{\omega \frac{\mathfrak{d}(x-a)}{\mathfrak{d}\tau}} + \frac{\mathfrak{d}^2\overline{x-a}}{\mathfrak{d}\tau^2}$$

und beachten, daß

$$\frac{d\bar{\dot{a}}}{d\tau} = \frac{d^2\bar{a}}{d\tau^2} = \overline{\omega \dot{a}} + \frac{\mathfrak{d}\bar{\dot{a}}}{\mathfrak{d}\tau}$$

ist. Dann ergibt sich

$$\text{(c)} \qquad \begin{cases} \overline{w} = \dfrac{d^2\bar{a}}{d\tau^2} + \overline{\omega[\omega(x-a)]} + \overline{\dfrac{\mathfrak{d}\omega}{\mathfrak{d}\tau}(x-a)} \\ \qquad + 2\,\overline{\omega \dfrac{\mathfrak{d}(x-a)}{\mathfrak{d}\tau}} + \dfrac{\mathfrak{d}^2\overline{(x-a)}}{\mathfrak{d}\tau^2}. \end{cases}$$

Hierin ist

$$\frac{d^2\bar{a}}{d\tau^2} + \overline{\omega[\omega(x-a)]} + \overline{\frac{\mathfrak{d}\omega}{\mathfrak{d}\tau}(x-a)} = \overline{w}^*$$

diejenige Beschleunigung, welche der bewegliche Punkt besitzen würde, wenn er mit dem führenden starren System momentan fest verbunden wäre. Diese Komponente ($\overline{w}^*$) der absoluten Beschleunigung ($\overline{w}$) nennt man die „Führungsbeschleunigung".

Die dritte Komponente $\dfrac{\mathfrak{d}^2\overline{x-a}}{\mathfrak{d}\tau^2}$ ist die Beschleunigung infolge der relativen Bewegung, also die „relative Beschleunigung".

Von der mittleren Komponente $2 \cdot \overline{\omega \dfrac{\mathfrak{d}(x-a)}{\mathfrak{d}\tau}}$ kennen wir Größe und Richtung, sobald die relative Geschwindig-

Elementarbes

wieder die ex

ausgehend die
erhält

und

also

$$\overline{w} = \overline{\omega}$$

Nun ist aber

(a)

und mithin, wi

(b) $\overline{w} =$

138. Beschl begriffenen Punkt von der vorang relativen Beweg. gemeinen Form

(a) $\frac{d}{d}$

auszugehen. Da
ist auch

$$\overline{w} =$$

Setzt man in Gl

chtet also nicht auf die Kräfte, welche diese Bewegung ıervorbringen. Diesen Sachverhalt können wir erst in der)ynamik näher darlegen. Hier war nur darauf hinzuweisen, 'aß die absolute Geschwindigkeit $\bar{v}$ in dieser Auffassung ine Komponente enthält, welche von der Zeit (τ) explizit bhängt. Da dieser Umstand bei der bisherigen Ableitung er Lagrangeschen Gleichungen in Abschnitt II nicht be- ɔnders berücksichtigt wurde, so wollen wir diese Auffassung ·tzt näher erörtern.

140. Lagranges Ausdrücke für ein Geschwindigkeitssystem, 'elches von der Zeit explizit abhängt. Wir gehen von der ʳoraussetzung aus, der Vektor ($\bar{x}$) des beweglichen Punktes ·i explizit von der Zeit abhängig und gleichzeitig von zwei 'arametern ϑ_1, ϑ_2, wie wir sie früher mehrfach benutzt ıben. Dann ist

$$
) \qquad \bar{v} = \frac{d\bar{x}}{d\tau} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial \vartheta_1}\frac{d\vartheta_1}{d\tau} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial \vartheta_2}\cdot\frac{d\vartheta_2}{d\tau}
$$

. der üblichen Schreibweise der Differentialrechnung. Die egleitvektoren

$$
\frac{\partial \bar{x}}{\partial \vartheta_1} = \bar{e}_1\,, \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial \vartheta_2} = \bar{e}_2
$$

ıben dieselbe geometrische Bedeutung wie in Nr. 55. Sie ıd aber jetzt explizite Funktionen der Zeit τ. Demnach wird

$$
\frac{d\bar{e}_1}{d\tau} = \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial \vartheta_1}\frac{d\vartheta_1}{d\tau} + \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial \vartheta_2}\frac{d\vartheta_2}{d\tau}
$$

er

$$
\frac{d\bar{e}_1}{d\tau} = \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial \vartheta_1\,\partial \tau} + \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial \vartheta_1^2}\frac{d\vartheta_1}{d\tau} + \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial \vartheta_1\,\partial \vartheta_2} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \vartheta_1}
$$

ıd die analoge Beziehung für $\bar{e}_2$.

Man erkennt jetzt, daß die erweiterte Voraussetzung in r Form der Lagrangeschen Gleichungen für die Begleit- ›mente der Geschwindigkeit und der Beschleunigung keiner- Änderung mit sich führt. Es wird also auch hier

$$
\bar{e}_1\,\bar{v} = P_1 = \frac{\partial E}{\partial \dot{\vartheta}_1}\,, \quad \bar{e}_2\,\bar{v} = P_2 = \frac{\partial E}{\partial \dot{\vartheta}_2}
$$

d

$$
\bar{e}_1\,\bar{w} = Q_1 = \frac{dP_1}{d\tau} - \frac{\partial E}{\partial \vartheta_1}\,, \quad \bar{e}_2\,\bar{w} = Q_2 = \frac{dP_2}{d\tau} - \frac{\partial E}{\partial \vartheta_2}\,.
$$

141. Bewegung eines Punktes auf einer zwangsweise geführten Fläche. Wir denken uns die Fläche mit dem beweglichen Achsenkreuz $(A_{I\,II\,III})$ fest verbunden und durch ihre Gleichungen in der Parameterform

$$\mathfrak{z}_I = f_I(\vartheta_1, \vartheta_2), \quad \mathfrak{z}_{II} = f_{II}(\vartheta_1, \vartheta_2), \quad \mathfrak{z}_{III} = f_{III}(\vartheta_1, \vartheta_2)$$

dargestellt. Sobald nun die Führungsbewegung gegeben ist, werden auch die absoluten Koordinaten $x_1 = a_1 + \mathfrak{z}_1$,

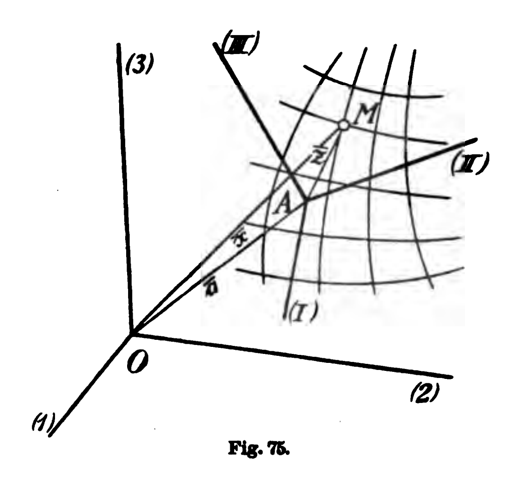


Fig. 75.

$x_2 = a_2 + \mathfrak{z}_2$, $x_3 = a_3 + \mathfrak{z}_3$ eines Flächenpunktes X bekannt sein. Wir können daher annehmen, daß der Ausdruck

$$\bar{v} = \bar{\dot{a}} + \overline{\omega\,\mathfrak{z}} + \frac{\mathfrak{d}\,\bar{\mathfrak{z}}}{\mathfrak{d}\tau}$$

eine definite Funktion der Zeit (τ) und der beiden Parameter ϑ_1, ϑ_2 ist. Dasselbe gilt von der kinetischen Energie (man vergleiche Nr. 139):

$$E = \tfrac{1}{2} v^{*2} + \bar{v}\,\bar{u} + \tfrac{1}{2} u^2.$$

Wir setzen nun zur weiteren Abkürzung

$$\tfrac{1}{2} v^{*2} = E^*, \quad \tfrac{1}{2} u^2 = R, \quad \bar{v}\,\bar{u} = M,$$

so daß

$$E = E^* + M + R$$

wird. Die Bestandteile M und R der ganzen kinetischen Energie E sind von ϑ_1, ϑ_2 und den Zeitderivierten

$$\dot{\vartheta}_1 = \frac{\mathfrak{d}\vartheta_1}{\mathfrak{d}\tau}, \quad \dot{\vartheta}_2 = \frac{\mathfrak{d}\vartheta_2}{\mathfrak{d}\tau}$$

abhängig, während E^* die beiden letzten Größen nicht enthält.

Hiernach lauten die Lagrangeschen Gleichungen für die Begleitmomente der absoluten Beschleunigung $\overline{w}$:

$$Q_1 = -\frac{\partial E^*}{\partial \vartheta_1} + \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{\vartheta}_1}\right) - \frac{\partial R}{\partial \vartheta_1} + \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial M}{\partial \dot{\vartheta}_1}\right) - \frac{\partial M}{\partial \vartheta_1},$$

$$Q_2 = -\frac{\partial E^*}{\partial \vartheta_2} + \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{\vartheta}_2}\right) - \frac{\partial R}{\partial \vartheta_2} + \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial M}{\partial \dot{\vartheta}_2}\right) - \frac{\partial M}{\partial \vartheta_2},$$

wo also

$$M = \frac{d\bar{a}}{d\tau} \cdot \frac{\mathfrak{d}\bar{z}}{\mathfrak{d}\tau} + \bar{\omega} \cdot \overline{z \frac{\mathfrak{d}z}{\mathfrak{d}\tau}}$$

zu nehmen ist. $\bar{a}$ und $\bar{\omega}$ sind als gegebene Funktionen der Zeit zu betrachten. Das nachfolgende Beispiel wird den Gang der Rechnung im einzelnen klarstellen.

142. Bewegung eines Punktes auf einer rotierenden Ebene. Die Ebene, deren augenblickliche Lage durch die Punkte ABC (Fig. 76) bestimmt ist, drehe sich um die vertikale Achse OA. Ein von O ausgehender Einheitsvektor in derselben sei $\bar{\eta}$. Die Projektion OF der Gefälllinie OF bilde mit dem festen Vektor $\bar{\lambda}$ den Winkel α. Der in der Ebene bewegliche Punkt X wird auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem in derselben bezogen, dessen von A ausgehende Achsen durch die Einheitsvektoren $\bar{\varepsilon}$ und $\bar{\zeta}$ fixiert sind. Nach diesen Festsetzungen ergibt sich aus der Figur:

$$\bar{\varepsilon} = \cos\alpha \cdot \overline{\eta\lambda} - \sin\alpha \cdot \bar{\lambda}$$

und

$$\bar{\zeta} = \sin\gamma \cdot \bar{\eta} - \cos\gamma \cdot \overline{\eta\varepsilon}.$$

Es ist also auch

$$\bar{\zeta} = \sin\gamma \cdot \bar{\eta} + \cos\gamma(\cos\alpha \cdot \bar{\lambda} + \sin\alpha \cdot \overline{\eta\lambda}).$$

Bezeichnen wir noch die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes X in der rotierenden Ebene mit p und q, so ist

$$\bar{z} = p(\cos\alpha \cdot \overline{\eta\lambda} - \sin\alpha \cdot \bar{\lambda})$$
$$+ q(\sin\gamma \cdot \bar{\eta} + \cos\gamma\cos\alpha \cdot \bar{\lambda} + \cos\gamma\sin\alpha \cdot \overline{\eta\lambda})$$

und der Vektor der Winkelgeschwindigkeit

$$\overline{\omega} = \omega \cdot \overline{\eta} = \frac{d\alpha}{d\tau} \cdot \overline{\eta}.$$

Der weitere Gang der Rechnung erfolgt durchaus nach dem Schema der Lagrangeschen Gleichungen.

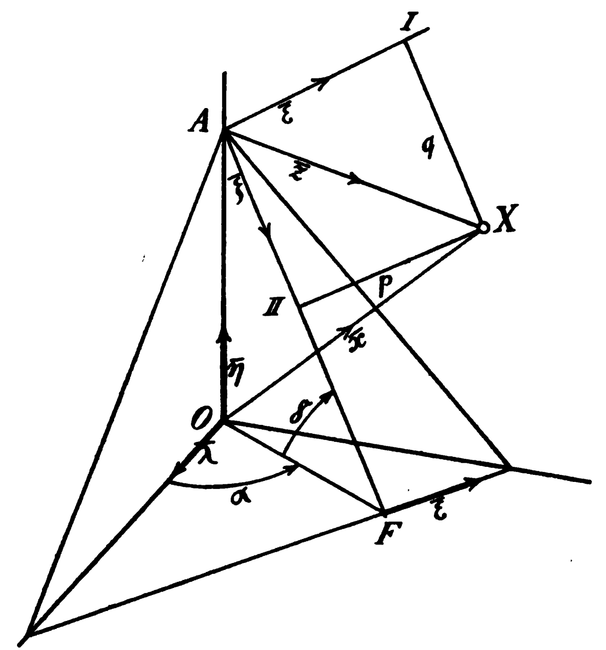


Fig. 76.

So erhält man

$$\overline{\omega\,\mathfrak{z}} = (-\cos\alpha \cdot \overline{\lambda} - \sin\alpha \cdot \overline{\eta\,\lambda})\,\omega\,p$$
$$+ (\cos\alpha \cdot \overline{\eta\,\lambda} - \sin\alpha \cdot \overline{\lambda})\,\omega\,q\cos\gamma$$

und hieraus

$$\overline{\omega\,\mathfrak{z}}^2 = (p^2 + \cos^2\gamma \cdot q^2)\,\omega^2,$$

so daß man

$$E^* = \tfrac{1}{2}(p^2 + \cos^2\gamma \cdot q^2)\,\omega^2$$

als ersten Bestandteil der kinetischen Energie findet. Selbstverständlich wird

$$R = \tfrac{1}{2}(\dot{p}^2 + \dot{q}^2).$$

Es bleibt also nur noch das mittlere Glied

$$M = \overline{\omega \mathfrak{z}} \frac{\mathfrak{d} \bar{\mathfrak{z}}}{\mathfrak{d} \tau}$$

zu berechnen.

Nun ist

$$\frac{\mathfrak{d} \bar{\mathfrak{z}}}{\mathfrak{d} \tau} = (\cos\alpha \cdot \overline{\eta \lambda} - \sin\alpha \cdot \bar{\lambda}) \dot{p}$$

$$+ [\sin\gamma \cdot \bar{\eta} + \cos\gamma(\cos\alpha \cdot \bar{\lambda} + \sin\alpha \cdot \overline{\eta \lambda})] \dot{q} .$$

Folglich die mittlere Komponente der kinetischen Energie

$$M = \cos\gamma (p\dot{q} - q\dot{p}) \omega .$$

Jetzt kann man alle erforderlichen Differentialquotienten bilden. Man erhält

$$\frac{\partial E^*}{\partial p} = p \cdot \omega^2 , \qquad \frac{\partial E^*}{\partial q} = q \cos^2\gamma \cdot \omega^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial \dot{p}} = \cos\gamma \cdot \omega q , \qquad \frac{\partial M}{\partial \dot{q}} = -\cos\gamma \cdot \omega p$$

$$\frac{\partial M}{\partial p} = -\cos\gamma\, \omega \cdot \dot{q} , \qquad \frac{\partial M}{\partial q} = \cos\gamma \cdot \omega \dot{p}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial M}{\partial \dot{p}}\right) = \cos\gamma\, \omega \cdot \dot{q} + \cos\gamma \cdot q \frac{d\omega}{d\tau}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial M}{\partial \dot{q}}\right) = -\cos\gamma\, \omega \cdot \dot{p} - \cos\gamma \cdot p \frac{d\omega}{d\tau} .$$

Hieraus folgen die Begleitmomente der Beschleunigung

$$Q_I = \cos\gamma \cdot q \frac{d\omega}{d\tau} - p\,\omega^2 + 2\cos\gamma\, \omega \frac{dq}{d\tau} + \frac{d^2 p}{d\tau^2} ,$$

$$Q_{II} = -\cos\gamma \cdot p \frac{d\omega}{d\tau} + \cos^2\gamma \cdot q\, \omega^2 - 2\cos\gamma \cdot \omega \frac{dp}{d\tau} + \frac{d^2 q}{d\tau^2} .$$

In diesen Ausdrücken erkennt man deutlich die Bestandteile, welche der Führungsbeschleunigung, der Coriolis-Beschleunigung und der relativen Beschleunigung entstammen.

Aufgabe 55. Welche Kurve beschreibt ein Punkt auf der rotierenden Ebene, wenn im besonderen Falle $\frac{d\omega}{d\tau} = 0$,

$Q_I = 0$ und $Q_{II} = 0$ wird? Die Anfangsgeschwindigkeit c sei nach $\bar{\varepsilon}$ (horizontal) gerichtet und der Punkt X befinde sich zur Zeit $\tau = 0$ auf der Gefälllinie der schrägen Ebene in einem Abstande e vom Punkte A.

143. Bewegung eines Punktes auf einer zwangsweise geführten starren Kurve. Soll dieses Problem nach der Lagrangeschen Methode in Angriff genommen werden, so gelten die Entwicklungen in Nr. 141 ohne weiteres, sobald man dieselben auf eine einzige Koordinate ϑ beschränkt. In dem führenden Raume sind jetzt

$$z_I = f_I(\vartheta)\,, \quad z_{II} = f_{II}(\vartheta)\,, \quad z_{III} = f_{III}(\vartheta)$$

die Gleichungen der geführten Bahnkurve.

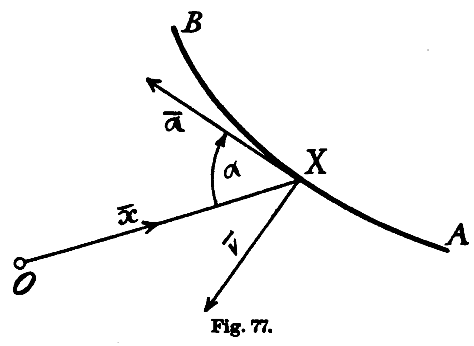


Fig. 77.

Mit Rücksicht auf die Anwendungen der Theorie der relativen Bewegung zur Erklärung der Wirkungsweise der Turbinen*) hat man den besonderen Fall einer ebenen Kurve, die um einen festen Punkt ihrer Ebene rotiert, wiederholt ausführlich behandelt. Hier benutzt man am bequemsten eine direkte Zerlegung des Vektors der absoluten Beschleunigung

$$\bar{w} = \overline{\dot{\bar{\omega}}\,\bar{x}} - \omega^2 \cdot \bar{x} + 2 \cdot \overline{\bar{\omega}\,\bar{u}} + \frac{\mathfrak{d}\bar{u}}{\mathfrak{d}\tau}$$

nach der Tangente $(\bar{\sigma})$ und der Normale $(\bar{\nu})$ der geführten Bahn. Man erhält durch Projektion von $\bar{w}$ auf die Richtungen $\bar{\sigma}$ und $\bar{\nu}$ sofort:

$$w_\sigma = \bar{w}\,\bar{\sigma} = \dot{\bar{\omega}}\,\overline{\bar{x}\,\bar{\sigma}} - \omega^2(\bar{x}\,\bar{\sigma}) + \bar{\sigma}\,\frac{\mathfrak{d}\bar{u}}{\mathfrak{d}\tau}\,,$$

$$w_\nu = \bar{w}\,\bar{\nu} = \bar{\nu}\,\overline{\dot{\bar{\omega}}\,\bar{x}} - \omega^2(\bar{x}\,\bar{\nu}) + 2\,\overline{\bar{\omega}\,\bar{u}} \cdot \bar{\nu}\,.$$

*) Man vergleiche E. A. Brauer, Grundriß der Turbinentheorie. Leipzig 1899, S. 19—27.

Bezeichnet man den veränderlichen Winkel zwischen dem Radiusvektor $OX = r$ und der Tangentenrichtung $(\bar{\sigma})$ mit α, dann nehmen die vorstehenden Gleichungen die Form an

$$w_\sigma = -r \sin\alpha \frac{\mathfrak{d}\omega}{\mathfrak{d}\tau} - r\omega^2 \cos\alpha + \frac{\mathfrak{d}u}{\mathfrak{d}\tau},$$

$$w_\nu = r \cos\alpha \frac{\mathfrak{d}\omega}{\mathfrak{d}\tau} - r\omega^2 \sin\alpha + 2\omega u + \frac{u^2}{a},$$

wo a den Biegungsradius der Bahn bedeutet.

144. Zerlegung der Geschwindigkeit und Beschleunigung nach den Achsen des führenden Systems. Die auf das bewegte Achsenkreuz bezogenen Komponenten der Geschwindigkeit

$$\text{(a)} \qquad \bar{v} = \bar{\dot{a}} + \overline{\omega(x - a)} + \bar{u}$$

sind, wenn wir zur Abkürzung $\overline{x - a} = \bar{z}$ setzen:

$$\text{(b)} \qquad \begin{cases} v_I = \dot{a}_I + \omega_{II} z_{III} - \omega_{III} z_{II} + u_I, \\ v_{II} = \dot{a}_{II} + \omega_{III} z_I - \omega_I z_{III} + u_{II}, \\ v_{III} = \dot{a}_{III} + \omega_I z_{II} - \omega_{II} z_I + u_{III}. \end{cases}$$

Man erhält die Komponenten $\dot{a}_I$, $\dot{a}_{II}$, $\dot{a}_{III}$ aus den auf das ruhende Achsenkreuz $(O_{1,2,3})$ bezogenen Komponenten $\dot{a}_1$, $\dot{a}_2$, $\dot{a}_3$ von $\bar{\dot{a}}$ nach den Gleichungen (20) von Nr. 109, nämlich

$$\text{(c)} \qquad \begin{cases} \dot{a}_I = \varepsilon_{I1} \dot{a}_1 + \varepsilon_{I2} \dot{a}_2 + \varepsilon_{I3} \dot{a}_3, \\ \dot{a}_{II} = \varepsilon_{II1} \dot{a}_1 + \varepsilon_{II2} \dot{a}_2 + \varepsilon_{II3} \dot{a}_3, \\ \dot{a}_{III} = \varepsilon_{III1} \dot{a}_1 + \varepsilon_{III2} \dot{a}_2 + \varepsilon_{III3} \dot{a}_3. \end{cases}$$

Nun ist in gleicher Weise noch der Vektor der absoluten Beschleunigung $\bar{w}$ in seine rechtwinkligen Komponenten w_I, w_{II}, w_{III} zu zerlegen. Dieser Vektor ist nach Gleichung (c) in Nr. 138:

$$\text{(d)} \qquad \bar{w} = \frac{d\bar{\dot{a}}}{d\tau} + \overline{\omega(\omega z)} + \overline{\dot{\omega} z} + 2\,\overline{\omega u} + \frac{\mathfrak{d}\bar{u}}{\mathfrak{d}\tau}.$$

Hierin ist nach der Entwicklungsformel

$$\overline{\omega(\omega z)} = (\bar{\omega}\,\bar{z}) \cdot \bar{\omega} - \omega^2 \bar{z}$$

und die Zerlegung nach den bewegten Achsen gibt die Komponenten

$$(\omega_I z_I + \omega_{II} z_{II} + \omega_{III} z_{III}) \cdot \omega_I - (\omega_I^2 + \omega_{II}^2 + \omega_{III}^2) \cdot z_I,$$
$$(\omega_I z_I + \omega_{II} z_{II} + \omega_{III} z_{III}) \cdot \omega_{II} - (\omega_I^2 + \omega_{II}^2 + \omega_{III}^2) \cdot z_{II},$$
$$(\omega_I z_I + \omega_{II} z_{II} + \omega_{III} z_{III}) \cdot \omega_{III} - (\omega_I^2 + \omega_{II}^2 + \omega_{III}^2) \cdot z_{III}.$$

Sie lassen sich in übersichtlicher Form darstellen, wenn man die Hilfsgröße

$$\text{(e)}\quad \begin{cases} 2P = (\omega_I z_I + \omega_{II} z_{II} + \omega_{III} z_{III})^2 \\ \qquad - (\omega_I^2 + \omega_{II}^2 + \omega_{III}^2)(z_I^2 + z_{II}^2 + z_{III}^2) \end{cases}$$

in die Rechnung einführt. Dann werden die Komponenten von $\overline{\omega(\omega z)}$, nämlich gleich den partiellen Derivierten

$$\frac{\partial P}{\partial z_I}, \quad \frac{\partial P}{\partial z_{II}}, \quad \frac{\partial P}{\partial z_{III}}.$$

Zur Zerlegung der Beschleunigung $\frac{d\bar{\dot{a}}}{d\tau} = \bar{\ddot{a}}$ benutzen wir die Gleichung (a) in Nr. 137:

$$\text{(f)}\qquad \frac{d\bar{\dot{a}}}{d\tau} = \overline{\omega \dot{a}} + \frac{\mathfrak{d}\bar{\dot{a}}}{\mathfrak{d}\tau}$$

und erhalten:

$$\text{(g)}\quad \begin{cases} \ddot{a}_I = \omega_{II} \dot{a}_{III} - \omega_{III} \dot{a}_{II} + \dfrac{\mathfrak{d}\dot{a}_I}{\mathfrak{d}\tau}, \\ \ddot{a}_{II} = \omega_{III} \dot{a}_I - \omega_I \dot{a}_{III} + \dfrac{\mathfrak{d}\dot{a}_{II}}{\mathfrak{d}\tau}, \\ \ddot{a}_{III} = \omega_I \dot{a}_{II} - \omega_{II} \dot{a}_I + \dfrac{\mathfrak{d}\dot{a}_{III}}{\mathfrak{d}\tau}. \end{cases}$$

Die gesuchten Komponenten von $\bar{w}$ nach den Achsen des führenden Systems werden also

$$\text{(h)}\quad \begin{cases} w_I = \omega_{II} \dot{a}_{III} - \omega_{III} \dot{a}_{II} + \dfrac{d\dot{a}_I}{d\tau} + \dfrac{\partial P}{\partial z_I} + \dot{\omega}_{II} z_{III} - \dot{\omega}_{III} z_{II} \\ \qquad + 2\left(\omega_{II} \dfrac{dz_{III}}{d\tau} - \omega_{III} \dfrac{dz_{II}}{d\tau}\right) + \dfrac{d^2 z_I}{d\tau^2}, \\ w_{II} = \omega_{III} \dot{a}_I - \omega_I \dot{a}_{III} + \dfrac{d\dot{a}_{II}}{d\tau} + \dfrac{\partial P}{\partial z_{II}} + \dot{\omega}_{III} z_I - \dot{\omega}_I z_{III} \\ \qquad + 2\left(\omega_{III} \dfrac{dz_I}{d\tau} - \omega_I \dfrac{dz_{III}}{d\tau}\right) + \dfrac{d^2 z_{II}}{d\tau^2}, \\ w_{III} = \omega_I \dot{a}_{II} - \omega_{II} \dot{a}_I + \dfrac{d\dot{a}_{III}}{d\tau} + \dfrac{\partial P}{\partial z_{III}} + \dot{\omega}_I z_{II} - \dot{\omega}_{II} z_{III} \\ \qquad + 2\left(\omega_I \dfrac{dz_{II}}{d\tau} - \omega_{II} \dfrac{dz_I}{d\tau}\right) + \dfrac{d^2 z_{III}}{d\tau^2}. \end{cases}$$

In den vorstehenden Komponentengleichungen sind die $\mathfrak{d}$ durch das gewöhnliche Differentialsymbol d ersetzt, da die Differentialänderung eines Vektors in bezug auf das bewegte System natürlich durch die Differentialänderungen seines Komponenten in bezug auf dieses System gegeben sind.

Betrachtet man in diesen Formeln $\bar{z}$ als eine von der Zeit unabhängige Größe, so geben dieselben die Komponenten der Elementarbeschleunigung für einen Punkt des starren Systems.

145. Die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit und der Winkelbeschleunigung als Funktionen der Eulerschen Winkel und ihrer Zeitderivierten. Bei der Einführung der Eulerschen Winkel φ, ψ, χ in Nr. 114 haben wir das bewegte Achsenkreuz $A_{I, II, III}$ der Reihe nach um die Achsen $\bar{\varepsilon}_3$, $\bar{\varepsilon}_2'$ und $\bar{\varepsilon}_1''$ um die Winkel φ, ψ, χ gedreht. Führen wir diese Rotationen von einer beliebigen Position des Systems ausgehend um dieselben Achsen den unendlich kleinen Amplituden $d\varphi, d\psi, d\chi$ entsprechend aus, so ist offenbar

$$\bar{\omega} \cdot d\tau = \bar{\varepsilon}_3 \cdot d\varphi + \bar{\varepsilon}_2' \cdot d\psi + \bar{\varepsilon}_1'' \cdot d\chi$$

oder

$$\bar{\omega} = \bar{\varepsilon}_3 \cdot \dot{\varphi} + \bar{\varepsilon}_2' \cdot \dot{\psi} + \bar{\varepsilon}_1'' \cdot \dot{\chi} \,.$$

Die Ausdrücke für $\bar{\varepsilon}_3$, $\bar{\varepsilon}_2'$, $\bar{\varepsilon}_1''$ sind aber in Nr. 114 gegeben. Es genügt also, sie in den vorstehenden Ausdruck für $\bar{\omega}$ einzusetzen, um die Gleichung

$$\text{(a)} \left\{ \begin{aligned} \bar{\omega} = (\cos\varphi\cos\psi \cdot \dot{\chi} - \sin\varphi \cdot \dot{\psi}) \cdot \bar{\varepsilon}_1 + (\sin\varphi\cos\psi \cdot \dot{\chi} + \cos\varphi \cdot \dot{\psi}) \cdot \bar{\varepsilon}_2 \\ + (\dot{\varphi} - \sin\psi \cdot \dot{\chi}) \cdot \bar{\varepsilon}_3 \end{aligned} \right.$$

zu erhalten. Die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$ nach den ruhenden Achsen sind also

$$\text{(b)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \omega_1 &= \cos\varphi \cos\psi \cdot \dot{\chi} - \sin\varphi \cdot \dot{\psi} \\ \omega_2 &= \sin\varphi \cos\psi \cdot \dot{\chi} + \cos\varphi \cdot \dot{\psi} \\ \omega_3 &= \dot{\varphi} - \sin\psi \cdot \dot{\chi} \,. \end{aligned} \right.$$

Hieraus ergeben sich nun auch ganz einfach die Komponenten nach den bewegten Achsen, indem man in den Gleichungen

$$\begin{aligned} \omega_I &= \varepsilon_{I1}\ \omega_1 + \varepsilon_{I2}\ \omega_2 + \varepsilon_{I3}\ \omega_3 \,, \\ \omega_{II} &= \varepsilon_{II1}\ \omega_1 + \varepsilon_{II2}\ \omega_2 + \varepsilon_{II3}\ \omega_3 \,, \\ \omega_{III} &= \varepsilon_{III1}\,\omega_1 + \varepsilon_{III2}\,\omega_2 + \varepsilon_{III3}\,\omega_3 \end{aligned}$$

die Werte der neun Kosinus (ε_{I1}, ε_{I2} etc.) aus Nr. 114 einsetzt. Man erhält

$$\text{(c)}\quad \begin{cases} \omega_I = \dot{\chi} - \sin\psi \cdot \dot{\varphi} \\ \omega_{II} = \cos\psi \sin\chi \cdot \dot{\varphi} + \cos\chi \cdot \dot{\psi} \\ \omega_{III} = \cos\psi \cos\chi \cdot \dot{\varphi} - \sin\chi \cdot \dot{\psi}\,. \end{cases}$$

Hieraus folgt noch durch Differentiation nach der Zeit:

$$\text{(d)}\quad \begin{cases} \dot{\omega}_I = \ddot{\chi} - \cos\psi \cdot \dot{\psi}\dot{\varphi} - \sin\psi \cdot \ddot{\varphi} \\ \dot{\omega}_{II} = \cos\psi \sin\chi \cdot \ddot{\varphi} + \cos\chi \cdot \ddot{\psi} - \sin\psi \sin\chi \cdot \dot{\psi}\dot{\varphi} \\ \qquad\qquad + \cos\psi\cos\chi \cdot \dot{\chi}\dot{\varphi} - \sin\chi \cdot \dot{\chi}\dot{\psi} \\ \dot{\omega}_{III} = \cos\psi \cos\chi \cdot \ddot{\varphi} - \sin\chi \cdot \ddot{\psi} - \sin\psi \cos\chi \cdot \dot{\psi}\dot{\varphi} \\ \qquad\qquad - \cos\psi \sin\chi \cdot \dot{\chi}\dot{\varphi} - \cos\chi \cdot \dot{\chi}\dot{\psi} \end{cases}$$

für die Komponenten der Winkelbeschleunigung $\frac{d\overline{\omega}}{d\tau} = \frac{\mathfrak{d}\overline{\omega}}{\mathfrak{d}\tau}$.

146. Die rotierende Erde als führendes System. Das Problem der relativen Bewegung eines Punktes in bezug auf die rotierende Erde wurde wegen seiner astronomischen Bedeutung wiederholt behandelt. An dieser Stelle kommt für uns nur der Ansatz der kinematischen Gleichungen in Betracht, während die Integration der Differentialgleichungen und die sich daran knüpfende Diskussion der Lösung erst in der Dynamik ausgeführt werden kann*). Den Anfangspunkt des bewegten Achsenkreuzes legen wir in einen beliebigen Punkt A (Fig. 78) der Oberfläche der rotierenden Erde. NAQ sei ein Meridianquadrant dieses Ortes und ϑ der Winkel, welchen A von einer festen Nulllage aus zurückgelegt hat. Mit β bezeichnen wir die geographische Breite des Punktes A. Die Achsen AI, AII, $AIII$ legen wir der Reihe nach in die Richtung der Lotlinie des Ortes (positiv nach außen), in die Tangente des Parallelkreises (positiv im Drehungssinne des Erdkörpers) und in die Tangente des Meridians (positiv nach dem Nordpol N gerichtet). Nach diesen Festsetzungen wird:

$$\overline{\varepsilon}_I = \cos\beta\cos\vartheta \cdot \overline{\varepsilon}_1 + \cos\beta\sin\vartheta \cdot \overline{\varepsilon}_2 + \sin\beta \cdot \overline{\varepsilon}_3$$
$$\overline{\varepsilon}_{II} = -\sin\vartheta \cdot \overline{\varepsilon}_1 + \cos\vartheta \cdot \overline{\varepsilon}_2\,.$$

*) Nur das einfache Beispiel in Nr. 147 ist vorweggenommen.

Nun ist aber $\bar{\varepsilon}_{III} = \overline{\varepsilon_I \varepsilon_{II}}$. Demnach wird

$$\bar{\varepsilon}_{III} = -\sin\beta\cos\vartheta \cdot \bar{\varepsilon}_1 - \sin\beta\sin\vartheta \cdot \bar{\varepsilon}_2 + \cos\beta \cdot \bar{\varepsilon}_3 .$$

Ferner folgt aus der Voraussetzung einer konstanten Winkelgeschwindigkeit um die Achse ON

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega = \frac{d\vartheta}{d\tau} .$$

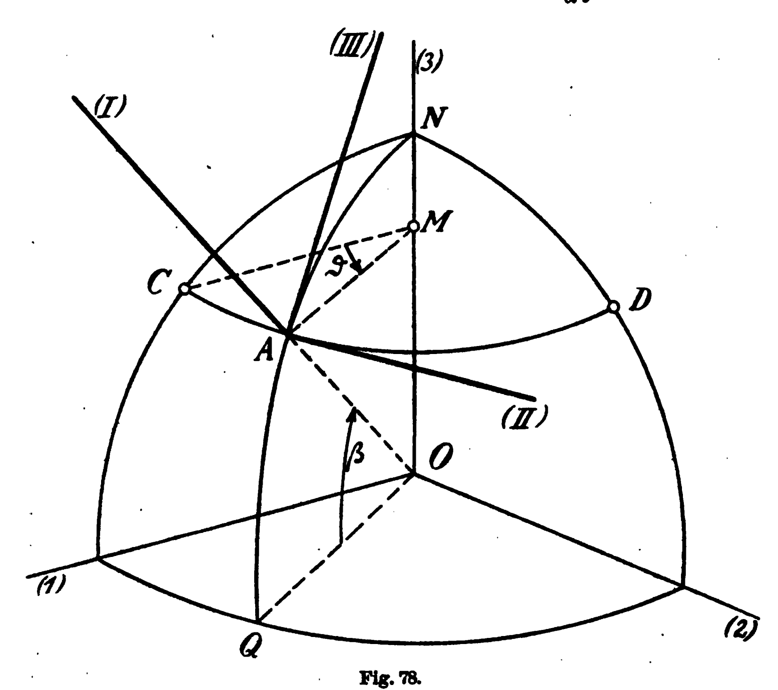


Fig. 78.

Man kennt also auch die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit nach den Achsen des führenden Koordinatensystems, nämlich

$$\omega_I = \sin\beta \cdot \omega, \quad \omega_{II} = 0, \quad \omega_{III} = \cos\beta \cdot \omega .$$

Von der Translationsbewegung der Erde sehen wir ganz ab, betrachten also den Mittelpunkt O als fest.

Die Hilfsgröße $2P$ wird jetzt nach Gleichung (e) in Nr. 144:

$$2P = (\sin\beta \cdot z_I + \cos\beta \cdot z_{III})^2 \cdot \omega^2 - \omega^2(z_I^2 + z_{II}^2 + z_{III}^2)$$

und man erhält hieraus die Differentialquotienten

$$\frac{\partial P}{\partial z_I} = \omega^2 \cos\beta(\sin\beta \cdot z_{III} - \cos\beta \cdot z_I)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z_{II}} = -\omega^2 \cdot z_{II}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z_{III}} = \omega^2 \sin\beta(\cos\beta \cdot z_I - \sin\beta \cdot z_{III}) \, .$$

Dieses Resultat kann man natürlich in einem so einfachen Falle, wie der vorliegende ist, auch durch direkte Überlegung gewinnen.

In den Gleichungen (h) von Nr. 144 sind jetzt alle Größen explizit bekannt. Man erhält daher für die Komponenten der absoluten Beschleunigung eines Punktes, der sich in relativer Bewegung zur rotierenden Erde außerhalb derselben befindet:

$$w_I = \omega^2 \cos\beta(\sin\beta \cdot z_{III} - \cos\beta \cdot z_I) - 2\,\omega\cos\beta \cdot \frac{dz_{II}}{d\tau} + \frac{d^2 z_I}{d\tau^2} \, ,$$

$$w_{II} = -\omega^2 \cdot z_{II} + 2\,\omega\left(\cos\beta\frac{dz_I}{d\tau} - \sin\beta\frac{dz_{III}}{d\tau}\right) + \frac{d^2 z_{II}}{d\tau^2} \, ,$$

$$w_{III} = \omega^2 \sin\beta(\cos\beta \cdot z_I - \sin\beta \cdot z_{III}) + 2\,\omega\sin\beta\frac{dz_{II}}{d\tau} + \frac{d^2 z_{III}}{d\tau^2} \, .$$

Wir werden diese Ausdrücke erst in der Dynamik weiter verfolgen. Damit aber die Formeln nicht ganz ohne Anwendung bleiben, soll im folgenden die relative Fallbewegung als ein elementares Beispiel näherungsweise durchgeführt werden.

147. Einfluß der Erdrotation auf die freie Fallbewegung. Da sich die Erde in 86164 Sekunden mittlerer Zeit einmal um ihre Achse dreht, so ist

$$\omega = \frac{2\pi}{86164}$$

also eine Größe, deren Quadrat man meistens vernachlässigt. Wir setzen jetzt in den letzten Gleichungen von Nr. 146

$$z_I = -x \, , \quad z_{II} = y \, , \quad z_{III} = z \, , \quad w_I = -g \, , \quad w_{II} = 0 \quad \text{und} \quad w_{III} = 0 \, .$$

Es wirkt also die Schwere senkrecht zur Erdoberfläche auf einen frei fallenden Massenpunkt und wir erhalten bei Ver-

nachlässigung von ω^2 für die Bewegung desselben die Gleichungen:

$$
\text{(a)} \quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{d\tau^2} = g - 2\,\omega\cos\beta\cdot\dfrac{dy}{d\tau} \\ \dfrac{d^2y}{d\tau^2} = 2\,\omega\left(\sin\beta\cdot\dfrac{dz}{d\tau} - \cos\beta\cdot\dfrac{dx}{d\tau}\right) \\ \dfrac{d^2z}{d\tau^2} = -2\,\omega\sin\beta\cdot\dfrac{dy}{d\tau}\,. \end{cases}
$$

Hieraus ergibt sich durch eine erste Integration sofort:

$$
\text{(b)} \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = g\tau - 2\,\omega\cos\beta\cdot y \\ \dfrac{dy}{d\tau} = 2\,\omega(z\sin\beta - x\cos\beta) \\ \dfrac{dz}{d\tau} = -2\,\omega\sin\beta\cdot y\,, \end{cases}
$$

wenn die Fallbewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit beginnt. Die zweite Gleichung (a) wird bei Vernachlässigung von ω^2

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = -2\,\omega\cos\beta\cdot g\,\tau$$

und man erhält jetzt für die betrachtete Bewegung das angenäherte Resultat

$$\text{(c)} \qquad x = \tfrac{1}{2}g\tau^2\,,\quad y = -\tfrac{1}{3}\,\omega\cos\beta\cdot g\,\tau^3\,,\quad z = 0\,.$$

Der fallende Körper zeigt also eine Abweichung nach Ost, die als Funktion des Fallweges ausgedrückt wird, durch die Gleichung

$$y = -\frac{\omega\cos\beta}{3\sqrt{g}}\cdot(2\,x)^{\frac{3}{2}}\,,$$

also am Äquator den größten Wert erhält.

Aufgabe 56. Wie groß ist die Ablenkung eines Körpers, der unter der Breite $\beta = 40^0$ ohne Anfangsgeschwindigkeit 600 m durchfallen hat?

148. Die Planbewegung des starren Körpers. Wir haben mit Absicht die wichtigsten kinematischen Beziehungen für

die allgemeine Raumbewegung entwickelt. Hierdurch werden dem Studierenden scheinbar einige Schwierigkeiten bereitet, da er nur zu häufig durch eine verkehrte und antiquierte elementargeometrische Ausbildung gewohnt ist, alles zunächst in der Ebene zu betrachten und im Glauben lebt, die Übertragung auf den Raum habe nur in Ausnahmefällen praktische Bedeutung. Dies ist ein verhängnisvoller Irrtum, der auch unablässig seine üblen Folgen trägt. In der unnatürlichen Vorliebe für die Ebene und die auf dieselbe beschränkten geometrischen Beziehungen und kinematischen Vorgänge muß man die Hauptquelle jener ängstlichen Hilfslosigkeit erblicken, die so viele hindert, ein Problem anzufassen und durchzuführen, welches nicht mehr in einer einzigen Ebene behandelt werden kann. Stellt man aber die räumliche Ausbildung voran, so werden nicht nur diese Hindernisse weggeräumt, sondern es kommt auch eine weit klarere Auffassung der ebenen Vorgänge zustande, und namentlich treten die besonderen Eigentümlichkeiten derselben deutlich hervor.

Aus diesem Gesichtspunkte werden wir im folgenden mehrere der bereits allgemein durchgeführten kinematischen Beziehungen jetzt auf die Ebene beschränken. Es ist hierbei weder notwendig noch zweckmäßig, sich den starren Körper als eine unendlich dünne Scheibe vorzustellen, es genügt vielmehr die Annahme, daß sich alle Punkte desselben parallel zu einer festen Ebene bewegen.

149. Relativgeschwindigkeit des Momentanzentrums. Die Auffassung der aufeinander folgenden Lagen des Momentanzentrums veranlaßt uns, die relative Bewegung eines Punktes in dem starren System vorzustellen, der in jedem Augenblicke mit dem Spurpunkte zusammenfällt. Dieser Punkt ($\mathfrak{z}'$) hat keine Führungsgeschwindigkeit, dagegen eine Relativgeschwindigkeit $\overline{u}'$, welche wir die S p u r g e s c h w i n d i g k e i t nennen wollen. Um sie zu bestimmen, differentiieren wir die Gleichung

$$\text{(a)} \qquad \bar{\mathfrak{t}} + \overline{\omega\,\mathfrak{z}'} = 0$$

total nach der Zeit τ und erhalten zunächst:

$$\frac{d\bar{\mathfrak{t}}}{d\tau} + \overline{\dot{\omega}\,\mathfrak{z}'} + \overline{\omega \cdot \frac{d\mathfrak{z}'}{d\tau}} = 0\,.$$

Nun ist aber nach der Grundformel der relativen Bewegung:

$$\frac{d\bar{z}'}{d\tau} = \overline{\omega z'} + \frac{\mathfrak{d}\bar{z}'}{\mathfrak{d}\tau} = \overline{\omega z'} + \bar{u}'.$$

Demnach wird:

$$\text{(b)} \qquad \frac{d\bar{t}}{d\tau} + \overline{\dot{\omega} z'} + \overline{\omega(\omega z')} + \overline{\omega u'} = 0\,,$$

worin man noch

$$\text{(c)} \qquad \frac{d\bar{t}}{d\tau} = \overline{\omega t} + \frac{\mathfrak{d}\bar{t}}{\mathfrak{d}\tau}$$

setzen kann.

Um aus der Gleichung (b) den Vektor $\bar{u}'$ zu erhalten, bilde man

$$\overline{\omega(\omega u')} = -\omega^2 \cdot \bar{u}'.$$

Auf diese Weise erhält man für die Relativgeschwindigkeit des Momentanzentrums den Ausdruck:

$$\omega^2 \cdot \bar{u}' = \overline{\omega \dot{t}} - \omega\dot{\omega} \cdot \bar{z}' - \omega^2 \cdot \overline{\omega z'}$$

oder

$$\omega^2 \cdot \bar{u}' = \omega^2 \cdot \bar{t} + \overline{\omega \dot{t}} - \omega\dot{\omega} \cdot \bar{z}'.$$

Wegen Gleichung (c) wird also*)

$$\text{(d)} \qquad \omega^2 \bar{u}' = \overline{\omega \frac{\mathfrak{d}t}{\mathfrak{d}\tau}} - \omega\dot{\omega} \cdot \bar{z}' = \overline{\omega \frac{\mathfrak{d}t}{\mathfrak{d}\tau}} - \frac{\dot{\omega}}{\omega} \overline{\omega t}\,.$$

Hieraus folgen dann die Komponenten nach den Achsen des bewegten Systems in der bisherigen Bezeichnung:

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} \omega u_I' = -\dot{\omega} z_I' - \omega \dfrac{dt_{II}}{d\tau} = +\dfrac{\dot{\omega}}{\omega} t_{II} - \omega \dfrac{dt_{II}}{d\tau}\,, \\[2ex] \omega u_{II}' = -\dot{\omega} z_{II}' + \omega \dfrac{dt_I}{d\tau} = -\dfrac{\dot{\omega}}{\omega} t_I + \omega \dfrac{dt_I}{d\tau}\,. \end{cases}$$

Die Relativgeschwindigkeit des Momentanzentrums ist also nach Größe und Richtung bekannt, wenn man die Winkelgeschwindigkeit, die Winkelbeschleunigung und den Vektor der Translationsgeschwindigkeit ($\bar{t}$) der Planbewegung kennt.

*) Dieses Resultat folgt auch unmittelbar aus Gleichung (a), wenn man die $\mathfrak{d}$-Differentiation anwendet.

150. Die absolute Beschleunigung des Momentanzentrums. Wir haben für einen beliebigen Systempunkt:

$$\bar{w} = \overline{\omega v} + \frac{\mathfrak{d}\bar{v}}{\mathfrak{d}\tau}.$$

Folglich für $\bar{v} = \overline{\omega(z - z')}$:

$$\text{(a)} \qquad \bar{w} = \overline{\omega\,[\omega(z - z')]} + \overline{\dot{\omega}(z - z')} - \overline{\omega u'}.$$

Für das Momentanzentrum ist $\bar{z} = \bar{z}'$. Mithin wird seine absolute Beschleunigung:

$$\bar{w}' = -\overline{\omega u'}.$$

Hieraus ergeben sich die Komponenten:

$$w'_I = \omega u'_{II}, \quad w'_{II} = -\omega u'_I$$

oder nach (A) in Nr. 149:

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} w'_I = -\dot{\omega} z'_{II} + \omega \dfrac{dt_I}{d\tau} = -\dfrac{\dot{\omega}}{\omega} t_I + \omega \dfrac{dt_I}{d\tau}, \\[2ex] w'_{II} = \quad \dot{\omega} z'_I + \omega \dfrac{dt_{II}}{d\tau} = -\dfrac{\dot{\omega}}{\omega} t_{II} + \omega \dfrac{dt_{II}}{d\tau}. \end{cases}$$

Die absolute Beschleunigung des Momentanzentrums ist durch seine relative Geschwindigkeit gegeben und verschwindet mit der letzteren.

151. Relative Beschleunigung des Momentanzentrums. Bei manchen Untersuchungen über ebene Rollbewegung kann auch die Kenntnis dieser Größe von Vorteil sein. Wir wollen deshalb ihre Ableitung hier einfügen.

Man wendet die $\mathfrak{d}$-Differentiation zweimal auf die Gleichung (a) in Nr. 149 an und erhält zunächst

$$\frac{\mathfrak{d}^2 \bar{t}}{\mathfrak{d}\tau^2} + 2 \cdot \overline{\dot{\omega} u'} + \overline{\omega \frac{\mathfrak{d} u'}{\mathfrak{d}\tau}} + \overline{\ddot{\omega} z'} = 0,$$

also auch

$$\omega^2 \cdot \frac{\mathfrak{d}\bar{u}'}{\mathfrak{d}\tau} = \overline{\omega \frac{\mathfrak{d}^2 t}{\mathfrak{d}\tau^2}} - 2\,\omega\,\dot{\omega} \cdot \bar{u}' - \omega\,\ddot{\omega} \cdot \bar{z}'.$$

In diesen Ausdruck hat man nur noch die bekannten Werte für $\bar{u}'$ und $\bar{z}'$ einzuführen, so daß

$$\omega^2 \cdot \frac{\mathfrak{d}\bar{u}'}{\mathfrak{d}\tau} = \overline{\omega \frac{\mathfrak{d}^2 t}{\mathfrak{d}\tau^2}} - 2\,\frac{\dot{\omega}}{\omega} \cdot \overline{\omega \frac{\mathfrak{d} t}{\mathfrak{d}\tau}} + \frac{2\,\dot{\omega}^2 - \omega\,\ddot{\omega}}{\omega^2} \cdot \omega\bar{t}$$

wird.

152. Grundgleichung der ebenen Rollbewegung. Bereits bei der Einführung der Spur- und Polkurve (Nr. 118) haben wir die ebene Rollbewegung erwähnt. Jetzt soll der Zusammenhang der Spurgeschwindigkeit u' des Momentanzentrums Z' (Fig. 79), welches zugleich der Berührungspunkt der beiden Kurven (1) und (I) ist, mit ihren Biegungsradien r_1, r_I abgeleitet werden.

Denken wir uns beide Kurven, während sie aufeinander abrollen in ebener Bewegung. Diese besteht, da das Gleiten ausgeschlossen ist, lediglich in je einer Rotationsbewegung um eine gemeinsame durch Z' gehende normale Achse $\overline{\eta}$. Da die Vektoren der Tangente ($\overline{\sigma}'$) und Biegungsnormale ($\overline{\nu}'$) beider Kurven zusammenfallen, so sind die betreffenden Winkelgeschwindigkeiten

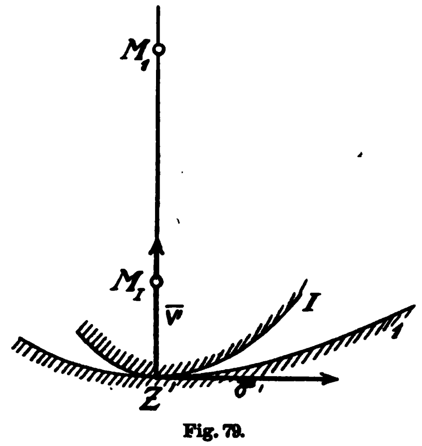


Fig. 79.

$$\overline{\omega}_1 = \frac{d\psi_1}{d\tau} \cdot \overline{\eta}', \quad \overline{\omega}_I = \frac{d\psi_I}{d\tau} \cdot \overline{\eta}',$$

wenn $d\psi_1$, $d\psi_I$ die Kontingenzwinkel der Kurven in Z' bedeuten und $\overline{\eta}' = \overline{\sigma\nu'}$ gesetzt wird. Erteilen wir nun beiden Kurven die Winkelgeschwindigkeit $-\overline{\omega}'$, so ruht die Kurve (1) und (I) hat die Winkelgeschwindigkeit

$$\overline{\omega}_I - \overline{\omega}_1 = \left(\frac{d\psi_I}{d\tau} - \frac{d\psi_1}{d\tau}\right) \cdot \overline{\eta}' = \overline{\omega}\,.$$

Die Einführung der Biegungsradien (r_1, r_I) gibt:

$$\overline{\omega} = \frac{ds}{d\tau} \cdot \left(\frac{1}{r_I} - \frac{1}{r_1}\right) \cdot \overline{\eta}'$$

oder, da $\frac{ds}{d\tau} = u'$ ist:

$$\text{(A)} \qquad \omega = u' \cdot \left(\frac{1}{r_I} - \frac{1}{r_1}\right)$$

als Grundgleichung der ebenen Rollbewegung.

Man kennt jetzt auch die Geschwindigkeit eines beliebigen mit der rollenden Kurve (I) fest verbundenen Systempunktes vermöge der Gleichung

$$\bar{v} = \overline{\omega(z - z')}\,,$$

sobald die Relativgeschwindigkeit u' des Kontaktpunktes gegeben ist.

153. Analytische Durchführung der ebenen Rollbewegung. Die rollende (Fig. 80) Kurve (I) sei in bezug auf das mit

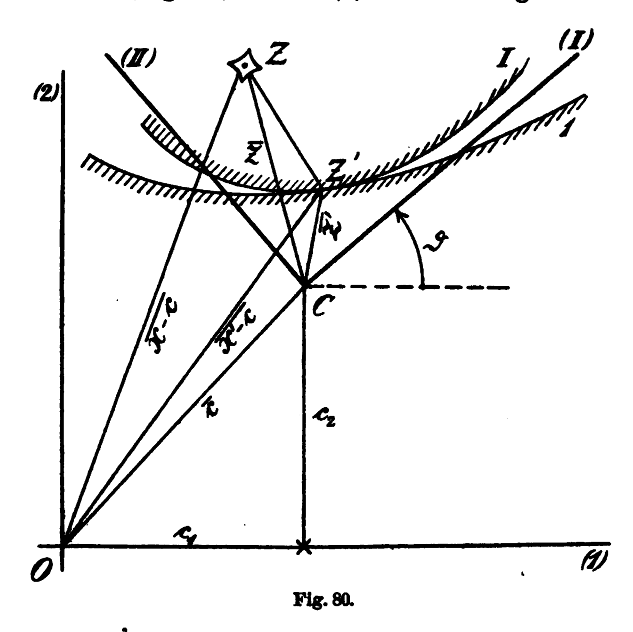


Fig. 80.

ihrer Ebene verbundene Achsenkreuz $C_{I,\,II}$ festgelegt. Die entsprechende Parameterdarstellung kann also in der Form

$$z'_I = f_I(\psi)\,, \quad z'_{II} = f_{II}(\psi)$$

geschrieben werden. Das ruhende Achsenkreuz ist $O_{1,\,2}$. Folglich kann man sich die ruhende Kurve durch die Gleichungen

$$x'_1 = F_1(\varphi)\,, \quad x'_2 = F_2(\varphi)$$

gegeben denken.

Die Beziehungen zwischen den auf beide Achsenkreuze bezogenen Koordinaten eines Systempunktes Z sind, wenn $C_{I,II}$ gegen $C_{1,2}$ um den Winkel ϑ gedreht ist:

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} x_1 - c_1 = \cos\vartheta \cdot z_I - \sin\vartheta \cdot z_{II} \\ x_2 - c_2 = \sin\vartheta \cdot z_I + \cos\vartheta \cdot z_{II} \end{cases}$$

und für den Kontaktpunkt Z'

$$\text{(b)} \qquad \begin{cases} x'_1 - c_1 = \cos\vartheta \cdot z'_I - \sin\vartheta \cdot z'_{II} \\ x'_2 - c_2 = \sin\vartheta \cdot z'_I - \cos\vartheta \cdot z'_{II}\,. \end{cases}$$

Nun müssen die Tangenten beider Kurven in Z' zusammenfallen und die Linienelemente von gleicher Größe sein. Diese Bedingung wird ausgedrückt durch die Gleichungen:

$$\text{(c)} \quad \frac{\partial x'_1}{\partial \varphi} d\varphi = \frac{\partial (x'_1 - c_1)}{\partial \psi} \cdot d\psi\,, \quad \frac{\partial x'_2}{\partial \varphi} d\varphi = \frac{\partial (x'_2 - c_2)}{\partial \psi} \cdot d\psi\,.$$

Mit Hilfe der Beziehungen (b) und (c) kann man zwei der Größen ϑ, φ, ψ durch irgend eine von ihnen ausdrücken. Man kennt dann $\bar{c}$, $\bar{z}'$ und $\bar{v} = \omega(\overline{z - z'})$ als Funktionen des beliebig gewählten unabhängigen Parameters.

Aus den Gleichungen (a), (b), (c) findet man ϑ als Funktion von φ und ψ, nämlich

$$\text{(d)} \qquad \operatorname{tg}\vartheta = -\frac{\dfrac{\partial x'_1}{\partial\varphi}\dfrac{\partial z'_I}{\partial\psi} + \dfrac{\partial x'_2}{\partial\varphi}\dfrac{\partial z'_{II}}{\partial\psi}}{\dfrac{\partial x'_1}{\partial\varphi}\dfrac{\partial z'_{II}}{\partial\psi} - \dfrac{\partial x'_2}{\partial\varphi}\dfrac{\partial z'_I}{\partial\psi}}\,.$$

Diese Gleichung und

$$\text{(e)} \qquad d\varphi\sqrt{\left(\frac{\partial x'_1}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x'_2}{\partial\varphi}\right)^2} = d\psi\sqrt{\left(\frac{\partial z'_I}{\partial\psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'_{II}}{\partial\psi}\right)^2}$$

enthalten die allgemeine Lösung der Aufgabe, woraus man erkennt, daß immer nur eine Quadratur auszuführen ist.

Als Beispiel wollen wir das Rollen (Epizykloidenbewegung) eines Kreises

$$z'_I = r\cos\psi\,, \quad z'_{II} = r\sin\psi$$

auf einem festen Kreise:

$$x'_1 = a(1 - \cos\varphi)\,, \quad x'_2 = a\sin\varphi$$

etwas näher ausführen.

Man hat jetzt nach den Gleichungen (b):

$$x_1' - c_1 = r\cos(\vartheta + \psi)\,, \quad x_2' - c_2 = r\sin(\vartheta + \psi)$$

und die Gleichungen (c) werden

$$\begin{cases} a\sin\varphi \cdot d\varphi = -r\sin(\vartheta + \psi)\,d\psi \\ a\cos\varphi \cdot d\varphi = r\cos(\vartheta + \psi)\,d\psi\,. \end{cases}$$

Hieraus folgt zunächst

$$\operatorname{tg}\varphi = -\operatorname{tg}(\vartheta + \psi)\,,$$

d. h.

$$\varphi = \pi - \vartheta - \psi$$

und dann

$$u'\,d\tau = a\,d\varphi = r\,d\psi$$

oder

$$(a + r)\,d\psi = -a\,d\vartheta\,.$$

Nimmt man also $\psi = \pi$ für $\vartheta = 0$, so wird

$$\psi = -\frac{a}{a+r}\vartheta + \pi\,, \quad \varphi = -\frac{r}{a+r}\cdot\vartheta\,.$$

Man hat demnach

$$u'\cdot d\tau = -\frac{a\,r}{a+r}\,d\vartheta\,,$$

d. h.

$$-\frac{d\vartheta}{d\tau} = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a}\right)\cdot u',$$

welches der Grundformel des Rollens entspricht.

Ferner wird

$$c_1 = a(1 - \cos\varphi) - r\cos(\vartheta + \psi)\,,$$
$$c_2 = a\sin\varphi \qquad - r\sin(\vartheta + \psi)$$

oder nach Einsetzung der Werte von φ und ψ

$$c_1 = a\left[1 - \cos\left(\frac{r}{a+r}\vartheta\right) - r\cos\left(\frac{r}{a+r}\vartheta\right)\right],$$

$$c_2 = -a\sin\left(\frac{r}{a+r}\vartheta\right) + r\sin\left(\frac{r}{a+r}\vartheta\right).$$

Der Kontaktpunkt bestimmt sich auch aus den Gleichungen

$$z_I' = -r\cos\left(\frac{a}{a+r}\vartheta\right) \quad \text{und} \quad z_{II}' = r\sin\left(\frac{a}{a+r}\vartheta\right).$$

Jeder Systempunkt beschreibt eine allgemeine Epizykloide.

Aufgabe 57. Man berechne nach der Formel $\overline{v} = \overline{\omega(z - z')}$ das Quadrat der Geschwindigkeit für den Systempunkt z_I, z_{II} bei der Epizykloidenbewegung unter den obengemachten Annahmen.

154. Das Beschleunigungszentrum. Der Ausdruck (a) in Nr. 150:

$$\text{(a)} \qquad \overline{w} = -\omega^2 \cdot \overline{z - z'} + \overline{\dot{\omega}(z - z')} - \overline{\omega u'}$$

wird für einen bestimmten Punkt $\overline{z^*}$ zu Null, wenn $\overline{z^*}$ der Gleichung

$$\text{(b)} \qquad 0 = -\omega^2 \cdot \overline{z^* - z'} + \overline{\dot{\omega}(z^* - z')} - \overline{\omega u'}$$

genügt. Das Momentprodukt mit $\overline{\dot{\omega}}$ gibt:

$$0 = -\omega^2 \cdot \overline{\dot{\omega}(z^* - z')} - \dot{\omega}^2 \cdot \overline{z^* - z'} + \omega\dot{\omega} \cdot \overline{u'}$$

und hieraus für die Bestimmung des Beschleunigungszentrums Z^* die Formel

$$\text{(A)} \qquad \overline{z^*} = \overline{z'} + \frac{\omega\dot{\omega}}{\omega^4 + \dot{\omega}^2}\overline{u'} - \frac{\omega^2}{\omega^4 + \dot{\omega}^2}\overline{\omega u'}.$$

Man kann die Beschleunigung $\overline{w}$ für einen beliebigen Punkt der Ebene auf das Beschleunigungszentrum Z^* beziehen. Die entsprechende Formel erhält man durch Subtraktion aus den Gleichungen (a) und (b), nämlich

$$\text{(c)} \qquad \overline{w} = -\omega^2 \cdot \overline{z - z^*} + \overline{\dot{\omega}(z - z^*)}.$$

Dies ist aber die Beschleunigung für die Bewegung eines Punktes auf einem momentan festen Kreise vom Radius $|\overline{z - z^*}|$ um den Mittelpunkt Z^*.

Aufgabe 58. Man konstruiere nach Gleichung (A) das Beschleunigungszentrum für die Lenkstange eines Kurbelmechanismus unter der Voraussetzung einer gleichförmigen Kurbeldrehung.

155. Wendekreis und Tangentialkreis. Wir projizieren die Beschleunigung

$$\overline{w} = -\omega^2 \cdot \overline{z - z'} + \overline{\dot{\omega}(z - z')} - \overline{\omega u'}$$

zunächst auf die Normale zur Bahn des Punktes. Nun ist aber

$$\overline{v} = \overline{\omega(z - z')}.$$

Diese Normale hat also die Richtung von $\overline{z - z'}$. Demnach bilden wir das Arbeitsprodukt

$$\overline{w} \cdot \overline{z - z'} = -\omega^2 \cdot \overline{z - z'}^2 - \overline{\omega u'} \cdot \overline{z - z'}.$$

Alle Systempunkte, für welche die Normalkomponente der Beschleunigung verschwindet, liegen also auf dem Kreise

$$\omega^2 \cdot \overline{z - z'}^2 + \overline{\omega u'} \cdot \overline{z - z'} = 0 .$$

Man hat den Ort dieser ausgezeichneten Systempunkte den „Wendekreis" der Bewegung genannt und in der geometrischen Kinematik des ebenen Systems vielfach verwertet. Alle Bahnkurven besitzen beim Durchgang durch diesen Kreis einen Wendepunkt eventuell mit Ausnahme des Momentanzentrums.

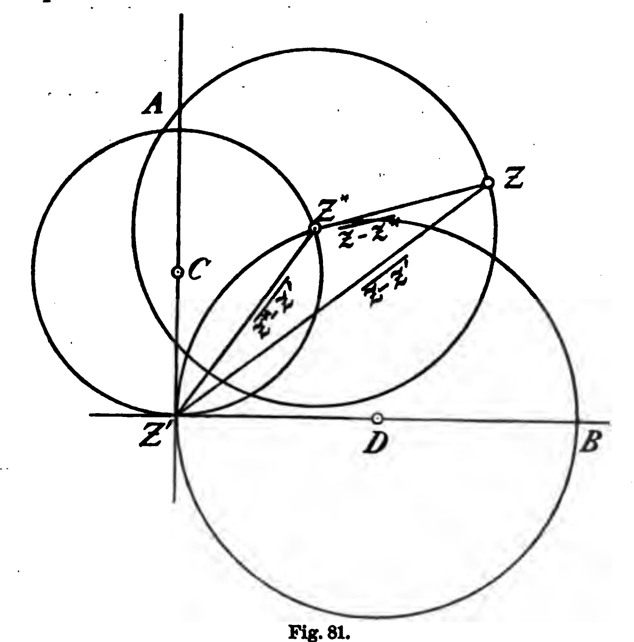


Fig. 81.

Jetzt projizieren wir die Beschleunigung $\overline{w}$ auf die Tangente der Bahn des Systempunktes, welche mit $\overline{v}$ gleichgerichtet ist. Dies führt zu dem Ausdrucke:

$$\overline{w}\,\overline{v} = -\omega^2 \cdot [\overline{z - z'} \cdot \overline{\omega(z - z')}] + \overline{\omega(z - z')} \cdot \overline{\dot{\omega}(z - z')} - \overline{\omega(z - z')} \cdot \overline{\omega u'} .$$

Hierin ist aber

$$\overline{z - z'} \cdot \overline{\omega(z - z')} = 0 ,$$

$$\overline{\omega(z - z')} \cdot \overline{\dot{\omega}(z - z')} = \omega \dot{\omega} \cdot \overline{z - z'}^2 ,$$

$$\overline{\omega(z - z')} \cdot \overline{\omega u'} = \omega^2 \cdot [\overline{u'} \cdot \overline{z - z'}] .$$

Mithin wird

$$\overline{w}\,\overline{v} = \omega\,\dot{\omega}\cdot\overline{\mathfrak{z}-\mathfrak{z}'}^2 - \omega^2\cdot[\overline{u}'\cdot\overline{\mathfrak{z}-\mathfrak{z}'}]$$

und man sieht, daß alle Systempunkte, deren Tangentialbeschleunigung momentan verschwindet auf dem Kreise

$$\dot{\omega}\cdot\overline{\mathfrak{z}-\mathfrak{z}'}^2 - \omega\cdot[\overline{u}'\cdot\overline{\mathfrak{z}-\mathfrak{z}'}] = 0$$

liegen. Für diesen Ort hat sich keine so gemeinsame Bezeichnung, wie für den vorigen, eingebürgert. Man nennt ihn zuweilen den Tangentialkreis.

Wendekreis und Tangentialkreis (Fig. 81) gehen durch das Momentanzentrum (Z'). Ihr zweiter Schnittpunkt ist das Beschleunigungszentrum (Z^*).

Aufgabe 59. In welcher Beziehung stehen die Biegungen der Bahnen für Systempunkte innerhalb und außerhalb des Wendekreises? $\left(\overline{w} = \frac{dv}{d\tau}\cdot\overline{\sigma} + \frac{v^2}{r}\cdot\overline{\nu}\right)$.

156. Kinematik des Stabplanimeters. Ein Stab (Fig. 82) XY von der Länge a gehe durch eine ebene Bewegung in eine

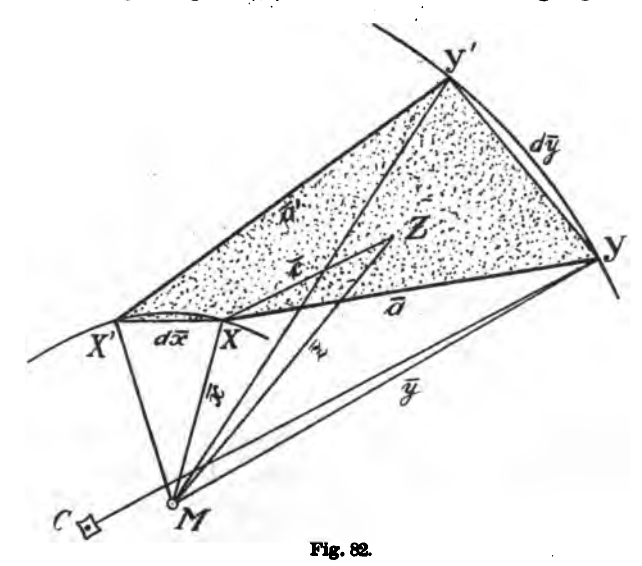


Fig. 82.

infinitesimal benachbarte Lage $X'Y'$ über, so daß der Punkt X den Weg $d\overline{x}$ und Y den Weg $d\overline{y}$ zurückgelegt hat. Die

Vektoren $\bar{x}, \bar{y}$ der Endpunkte des Stabes seien auf das Momentanzentrum M bezogen. Nach diesen Annahmen ist die vom Stabe überstrichene (in der Figur punktierte) Fläche dF dargestellt durch den Ausdruck:

$$2\,dF = \left|\,\overline{(y-x)\,(dy+dx)}\,\right| .$$

Nun ist aber

$$d\bar{x} = \overline{d\vartheta \cdot x}\,, \quad d\bar{y} = \overline{d\vartheta \cdot y}\,,$$

wenn $d\vartheta$ die Amplitude der Drehung bedeutet, und es wird infolgedessen

$$2\,d\bar{F} = \overline{(y-x)\,(d\vartheta \cdot y)} + \overline{(y-x)\,(d\vartheta \cdot x)}\,,$$

d. h.

$$2\,d\bar{F} = (y^2 - x^2) \cdot d\bar{\vartheta}$$

oder

$$2\,dF = (y^2 - x^2)\,d\vartheta\,.$$

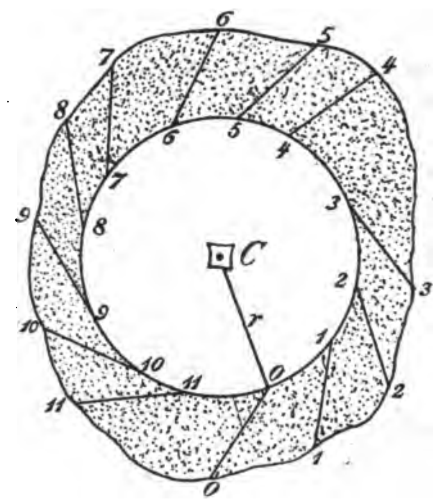


Fig. 88.

Wir nehmen nun an, mit dem Stabe XY sei ein Punkt Z ($XZ = \bar{c}$, $MZ = \bar{z}$) fest verbunden. Dann ist:

$$\bar{y} = \overline{x - c} \quad \text{und} \quad \bar{x} = \overline{z - c - a}\,.$$

Man erhält also

$$y^2 = z^2 + c^2 - 2\,\bar{c}\,\bar{z}$$

$$x^2 = z^2 + \overline{c+a}^2 - 2\,\overline{c+a} \cdot \bar{z}$$

und durch Subtraktion

$$y^2 - x^2 = -2\,\overline{a}\,\overline{c} - a^2 + 2\,\overline{a}\,\overline{z}\,.$$

Ferner ist

$$d\overline{z} = \overline{d\vartheta \cdot z} = \overline{\eta z} \cdot d\vartheta\,,$$

wenn $\overline{\eta}$ den Lotvektor auf der Bewegungsebene bedeutet.

Wir bilden jetzt

$$\overline{\eta\,a} \cdot d\overline{z} = (\overline{\eta\,a} \cdot \overline{\eta z})\,d\vartheta = (\overline{a} \cdot \overline{z})\,d\vartheta$$

und erhalten für das Doppelte des vom Stabe überstrichenen Flächenelementes

$$2\,dF = -(2\,\overline{a}\,\overline{c} + a^2)\,d\vartheta + \overline{\eta\,a} \cdot d\overline{z}\,.$$

In diesem Ausdrucke ist $d\overline{z}$ das Bahnelement des Systempunktes Z. Das Arbeitsprodukt stellt also die Projektion dieses Bahnelementes auf eine zur Stabachse senkrechte Richtung dar, wenn man von dem Faktor a (Stablänge) absieht. Setzt man daher in Z ein Rädchen (Rolle) ein, dessen Achse parallel zur Stabrichtung liegt und welches in derselben Richtung gerändelt ist, so daß es parallel zum Stabe gleiten kann, ohne zu rollen, dann registriert dasselbe den Ausdruck

$$\int \overline{\eta\,a} \cdot d\overline{z}\,,$$

wenn X den Bogen einer gegebenen Kurve durchläuft, während Y auf der Peripherie eines festen Kreises*) (Radius $CY = r$) um den Stift C wandert. Die gegebene Kurve sei geschlossen und werde von dem Endpunkt X des Stabes einmal vollständig umlaufen. Jetzt sind zwei Fälle zu unterscheiden. Liegt der feste Pol C innerhalb der geschlossenen Kurve (Fig. 83), so durchläuft ϑ alle Werte von 0 bis 2π, und es wird

$$2F = -(2\,\overline{a}\,\overline{c} + a^2) \cdot 2\pi + \int \overline{\eta\,a} \cdot d\overline{z}\,.$$

Der Inhalt der in Betracht kommenden Fläche ist

$$= F + \pi r^2\,.$$

Derselbe ist also vollständig bekannt, da durch die Registrierung des Rädchens (an einem Zählwerk) der Ausdruck $\int \overline{\eta\,a} \cdot d\overline{z}$ bestimmt ist. Noch einfacher gestaltet sich die

*) In dieser Anordnung ist der Apparat (mit Z auf der Stabachse) das Amslersche Polarplanimeter.

Planimetrierung der geschlossenen Kurve, wenn C außerhalb derselben liegt (Fig. 84), denn in diesem Falle ist $\int d\vartheta = 0$, da auf dem festen Kreise ein bestimmter Bogen vorwärts und rückwärts durchlaufen wird. Es wird also jetzt

$$F = \tfrac{1}{2}\int \overline{\eta\, a} \cdot d\bar{z}$$

und da das Rädchen algebraisch registriert, so stellt das Endresultat der Registrierung direkt den Flächeninhalt der gegebenen geschlossenen Kurve dar.

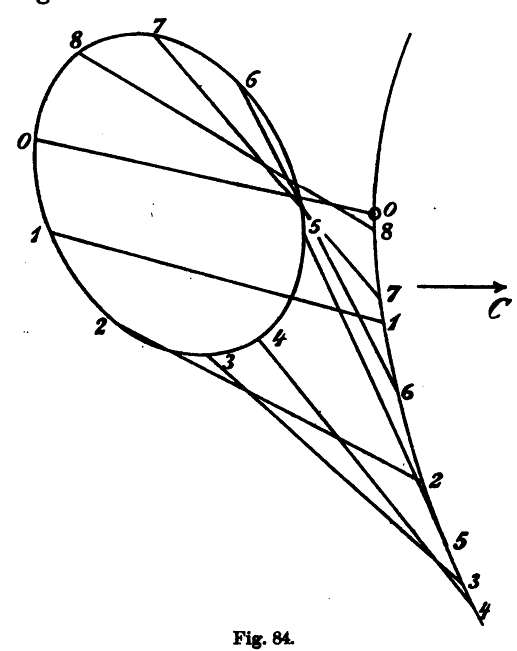


Fig. 84.

Als Führung des Punktes Y läßt sich jede feste Kurve, also auch eine gerade Linie wählen, was man durch einen passend konstruierten Karren erreicht, dessen Räder nicht seitwärts ausgleiten können. Realisiert ist dies durch das Rollplanimeter.

157. Das Rollen von Flächen aufeinander. Nachdem die Elementarvektoren der Planbewegung für unsere Zwecke genügend behandelt sind, wenden wir uns wieder der Raumbewegung des starren Systems zu und betrachten eine be-

sondere Form derselben, welche man als Kontaktbewegung bezeichnen könnte. Wenn die Oberfläche eines Körpers sich beständig auf eine feste Fläche stützt, so hat der Berührungspunkt des beweglichen Systems entweder keine absolute Geschwindigkeit oder dieselbe ist — wenigstens im allgemeinen — von Null verschieden. Im ersten Falle nennt man die Kontaktbewegung ein Rollen im weiteren Sinne des Wortes, im zweiten Falle findet Rollen und Gleiten statt.

Die Entwicklungen in Nr. 120 (Zentralachse des Geschwindigkeitssystems) zeigen uns eine besonders interessante Form der Kontaktbewegung starrer Körper, die dem ebenen Rollen möglichst analog ist. Man kennt nämlich für die ganz allgemeine Bewegung des starren Systems in jedem Augenblicke die Zentralachse der Geschwindigkeiten. Die stetige Folge derselben bildet sowohl im ruhenden Raume, als auch im bewegten Körper eine Regelfläche oder Axoid, welche einzeln der Spurkurve und Polkurve der Planbewegung entsprechen. Diese Axoide $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_I$ rollen aufeinander ab und verschieben sich längs der gemeinsamen Berührungsgeraden (Zentralachse) und zwar ist die Geschwindigkeit der Verschiebung (Nr. 120)

$$h = \frac{\bar{t}\,\overline{\omega}}{\omega},$$

wenn wir die frühere Bezeichnung beibehalten. Diese eigenartige Form der Kontaktbewegung wollen wir als Axoidbewegung oder Abschrotung*) bezeichnen.

Wenn ein Körper, welcher nicht von einer Regelfläche begrenzt ist, auf einer ruhenden Fläche rollt, so bilden die aufeinander folgenden Kontaktpunkte auf jeder Fläche eine Raumkurve (Rollspur) und man erkennt sofort, daß die Kinematik der Rollbewegung in der engsten Beziehung zur Geometrie der Flächenkurven steht. Damit ist aber auch der Weg dieser Untersuchung vorgezeichnet.

158. Der Begleitkörper einer freien Raumkurve. Zur Untersuchung der Flächenkurven (Rollspuren) und der allgemeinen Raumkurven, welche in keiner direkten Lagenbeziehung zu einer Fläche vorgestellt werden sollen, nennen wir die letzteren freie Raumkurven und die ersteren, indem wir ihnen

*) Diese letztere Bezeichnung rührt von Reuleaux her.

eine (unendlich kleine) Breite auf der Fläche zuschreiben, **Kurvenstreifen.** Auf die kinematische Bedeutung dieser Unterscheidung hat zuerst St. **Venant** (1843) in seinen Untersuchungen über die Elastizität ursprünglich gekrümmter Drähte aufmerksam gemacht und später haben **Kirchhoff, Thomson und Tait** (Natural Philosophy Bd. 1) diese Anschauung unverändert beibehalten. In der reinen Geometrie ist sie im wesentlichen von **Darboux** (Leçons) vertreten worden.

Als Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen denken wir uns die freie Raumkurve in der Parameterform

$$\bar{x} = \bar{f}(\psi)$$

gegeben und leiten daraus nach Nr. 25 und Nr. 26 die Fundamentalvektoren

$$\bar{\sigma} = \frac{d\bar{x}}{ds}, \quad \bar{\nu} = r\frac{d\bar{\sigma}}{ds}, \quad \bar{\eta} = \overline{\sigma\nu}$$

ab. Diese Einheitsvektoren bilden ein rechtwinkliges Achsenkreuz, welches den auf der betrachteten freien Raumkurve fortschreitenden Punkt während seiner Bewegung begleitet. Identifizieren wir daher dieses Achsenkreuz mit einem starren System, so können wir kurz von einem **Begleitkörper** reden, welcher dem beweglichen Kurvenpunkte stets zugeordnet ist. Seine Bewegung ist vollständig bestimmt, wenn man die Geschwindigkeit des Punktes in jeder Lage kennt. Insbesondere wird die Rotationsbewegung des Begleitkörpers aus den Gleichungen

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\tau} = \overline{\omega\sigma}, \quad \frac{d\bar{\nu}}{d\tau} = \overline{\omega\nu}, \quad \frac{d\bar{\eta}}{d\tau} = \overline{\omega\eta},$$

gefunden werden können. Denn aus diesen folgt sofort

$$\overline{\eta\frac{d\sigma}{d\tau}} = -\omega_\eta \cdot \bar{\sigma}, \quad \overline{\sigma\frac{d\nu}{d\tau}} = -\omega_\sigma \cdot \bar{\nu}, \quad \overline{\nu\frac{d\eta}{d\tau}} = -\omega_\nu \cdot \bar{\eta},$$

$$\overline{\nu\frac{d\sigma}{d\tau}} = -\omega_\nu \cdot \bar{\sigma}, \quad \overline{\eta\frac{d\nu}{d\tau}} = -\omega_\eta \cdot \bar{\nu}, \quad \overline{\sigma\frac{d\eta}{d\tau}} = -\omega_\sigma \cdot \bar{\eta},$$

wo $\omega_\sigma, \omega_\nu, \omega_\eta$ die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$ nach der Tangente, Biegungsnormale und Windungsnormale bedeuten.

Die absoluten Werte des Kontingenzwinkels $d\psi$ und des Windungswinkels $d\chi$ (Nr. 26 und 27) sind definiert durch

$$d\psi = \frac{ds}{r}, \quad d\chi = \frac{ds}{r'},$$

wo r den Biegungsradius und r' den Windungsradius bedeutet.

Man hat also die Beziehungen:

$$\begin{cases} \overline{\eta\, d\sigma} = \frac{ds}{r} \cdot \overline{\eta \nu} = d\psi \cdot \bar{\sigma}, \\ \overline{\sigma\, d\nu} = \nu\, d\sigma - d\bar{\eta} = d\bar{\eta} = d\chi \cdot \bar{\nu}, \\ \overline{\nu\, d\eta} = 0. \end{cases}$$

Die Vektoren $-\overline{\eta\, d\sigma}$ und $\overline{\sigma\, d\nu}$ betrachten wir als die orientierten Kontingenz- und Windungswinkel.

Ganz analog ergibt sich:

$$\begin{cases} \overline{\nu \cdot d\sigma} = 0, \\ \overline{\eta \cdot d\nu} = -d\psi \cdot \bar{\nu}, \\ \overline{\sigma \cdot d\eta} = d\chi \cdot \bar{\eta}. \end{cases}$$

Man erhält demnach für die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$ des Begleitkörpers der freien Raumkurve:

$$\omega_\sigma = -\frac{d\chi}{d\tau}, \quad \omega_\nu = 0, \quad \omega_\eta = \frac{d\psi}{d\tau}$$

und es wird

$$\overline{\nu \cdot \frac{d\nu}{d\tau}} = \bar{\omega} = \frac{d\psi}{d\tau} \cdot \bar{\eta} - \frac{d\chi}{d\tau} \cdot \bar{\sigma}.$$

Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit des Begleitkörpers der freien Raumkurve fällt also stets in die rektifizierende Ebene (liegt senkrecht zur Normalen) derselben.

159. Der Begleitkörper des Kurvenstreifens. Liegt die Raumkurve auf einer Fläche mit der Normalen $\bar{\varepsilon}$ (Fig. 85) und setzen wir

$$\overline{\sigma \varepsilon} = \bar{\varrho},$$

so wird

(a) $$\bar{\eta} = \bar{\varepsilon} \sin\lambda + \bar{\varrho} \cos\lambda,$$

wenn λ den Winkel zwischen der Kurvennormale $\bar{\nu}$ und der Flächennormale $\bar{\varepsilon}$ bedeutet.

Die drei Einheitsvektoren $\bar{\sigma}$, $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\varrho}$ bilden ein rechtwinkliges Achsenkreuz, welches den laufenden Punkt auf der Flächenkurve ebenso begleitet, wie das System $\bar{\sigma}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\eta}$ die freie Kurve begleitet. Wir können daher jetzt auch von einem Begleitkörper der Flächenkurve (Rollspur, Kurvenstreifen) reden und denselben in gleicher Weise wie vorher den Begleitkörper der freien Raumkurve kinematisch verfolgen.

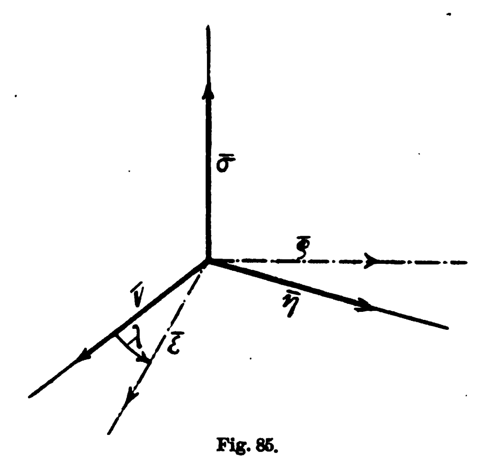


Fig. 85.

Aus der Fig. 85 folgen noch außer der Gleichung (a) die nachstehenden:

(b) $$\bar{\nu} = \cos\lambda \cdot \bar{\varepsilon} - \sin\lambda \cdot \bar{\varrho}\,,$$

(c) $$\bar{\varepsilon} = \cos\lambda \cdot \bar{\nu} + \sin\lambda \cdot \bar{\eta}\,,$$

(d) $$\bar{\varrho} = -\sin\lambda \cdot \bar{\nu} + \cos\lambda \cdot \bar{\eta}\,.$$

Für die Rotation ($\bar{\omega}'$) des zweiten Begleitkörpers gilt das ganz analoge Formelsystem:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\tau} = \overline{\omega'\sigma}\,, \quad \frac{d\bar{\varepsilon}}{d\tau} = \overline{\omega'\varepsilon}\,, \quad \frac{d\bar{\varrho}}{d\tau} = \overline{\omega'\varrho}\,,$$

$$\overline{\varepsilon\frac{d\sigma}{d\tau}} = -\omega'_\varepsilon \cdot \bar{\sigma}\,, \quad \overline{\varrho\frac{d\varepsilon}{d\tau}} = -\omega'_\varrho \cdot \bar{\varepsilon}\,, \quad \overline{\sigma\frac{d\varrho}{d\tau}} = -\omega'_\sigma \cdot \bar{\varrho}\,,$$

$$\overline{\varrho\frac{d\sigma}{d\tau}} = -\omega'_\varrho \cdot \bar{\sigma}\,, \quad \overline{\sigma\frac{d\varepsilon}{d\tau}} = -\omega'_\sigma \cdot \bar{\varepsilon}\,, \quad \overline{\varepsilon\frac{d\varrho}{d\tau}} = -\omega'_\varepsilon \cdot \bar{\varrho}\,.$$

Eine einfache Rechnung gibt nun

$$d\bar{\sigma} = -\sin\lambda \cdot d\psi \cdot \bar{\varrho} + \cos\lambda \cdot d\psi \cdot \bar{\varepsilon}\,,$$
$$d\bar{\varepsilon} = (d\lambda - d\chi) \cdot \bar{\varrho} \quad - \cos\lambda \cdot d\psi \cdot \bar{\sigma}\,,$$
$$d\bar{\varrho} = \sin\lambda \cdot d\psi \cdot \bar{\sigma} + (\sin^2\lambda \cdot d\chi - d\lambda) \cdot \bar{\varepsilon} + \sin\lambda\cos\lambda \cdot d\chi \cdot \bar{\varrho}$$

und dann auch die erforderlichen Momentprodukte:

$$\overline{\sigma\, d\varepsilon} = -(d\lambda - d\chi) \cdot \bar{\varepsilon}\,,$$
$$\overline{\varepsilon\, d\sigma} = -\sin\lambda \cdot d\psi \cdot \bar{\sigma}\,,$$
$$\overline{\varrho\, d\sigma} = -\cos\lambda \cdot d\psi \cdot \bar{\sigma}\,.$$

Hiermit ist die Berechnung der Komponenten von $\bar{\omega}'$ beendet, denn man hat

$$\omega'_\sigma = \frac{d\lambda}{d\tau} - \frac{d\chi}{d\tau}\,, \quad \omega'_\varepsilon = \sin\lambda \cdot \frac{d\psi}{d\tau}\,, \quad \omega'_\varrho = \cos\lambda \cdot \frac{d\psi}{d\tau}\,,$$

also

$$\bar{\omega}' = \left(\frac{d\lambda}{d\tau} - \frac{d\chi}{d\tau}\right) \cdot \bar{\sigma} + \sin\lambda \cdot \frac{d\psi}{d\tau} \cdot \bar{\varepsilon} + \cos\lambda \cdot \frac{d\psi}{d\tau} \cdot \bar{\varrho}\,.$$

Neben der Biegung $\frac{d\psi}{ds}$ und der Windung $\frac{d\chi}{ds}$ ist jetzt noch eine dritte Größe $\frac{d\lambda}{ds}$ hinzugetreten, die bei den freien Raumkurven fehlt. Um ihre Bedeutung anschaulicher zu machen, als es nach den vorangehenden Festsetzungen ohne weiteres der Fall ist, denken wir uns mit $\frac{d\psi}{ds}$ und $\frac{d\chi}{ds}$ den Grenzübergang gegen Null ausgeführt, dann konvergiert $\bar{\omega}'$ gegen den Wert

$$\bar{\omega}' = \frac{d\lambda}{ds}\,\frac{ds}{d\tau}\,\bar{\sigma}\,.$$

$\frac{d\lambda}{ds}$ stellt sich jetzt dar als das Maß der „Verdrehung“ des Flächenstreifens. Im allgemeinen Falle nennen wir die Größe

$$\frac{d\lambda}{ds} - \frac{d\chi}{ds} = \frac{1}{r''}$$

das Maß der „Drillung“ des Flächenstreifens. Die Drillung ist also die Differenz zwischen Verdrehung und Windung.

Ein gerades Stück Bandeisen ist natürlich biegungs- und windungsfrei, es kann aber bei gerader Achse eine bestimmte konstante oder veränderliche Verdrehung haben, die den Querschnittsdrehungen um diese Achse (Mittellinie) entspricht. St. Venant sagt in seiner Abhandlung über die elastischen Deformationen ursprünglich krummer Drähte (Comptes rendus 1843): „On peut s'étonner de voir, dans mes équations, une certaine quantité toute nouvelle*), dont personne n'a encore tenu compte, et qui s'y trouve en quelque sorte sur le même pied que les angles de contingence ($d\psi$) et d'osculation plane ($d\chi$). Un exemple montrera facilement, je pense, que ce deplacement angulaire du rayon de courbure sur la section (Querschnitt des Drahtes) devait entrer nécessairement dans notre analyse."

„Qu'on se figure une verge élastique à double courbure serrée de toutes parts dans un canal fixe et rigide, mais ou on puisse la faire tourner sur elle-même, car on suppose sa section circulaire ainsi que celle du canal. Dans ce mouvement, les fibres les plus longues se seront forcément raccourcies, les plus courtes se seront allongées, et il y aura eu aussi des torsions si les rotations imprimées à toutes les sections n'ont pas été les mêmes: l'élasticité de la pièce aura résisté énergiquement, donc tous les cas, à de pareils déplacements de ces points. Cependant, ni les rayons de courbure ni des plans osculateurs (Windung) de l'axe n'auront changé en aucune manière."

Lagrange hatte bei der Behandlung desselben elastischen Problems die Unterscheidung zwischen freien Raumkurven und räumlichen Kurvenstreifen übersehen und war deshalb zu einem unrichtigen Resultat gelangt.

Wir haben durch die vorstehende Entwicklung**) der Rotationsbewegung des zweiten Begleitkörpers eine vollständig ausreichende und anschauliche Grundlage für die Rollbewegung starrer Körper aufeinander gewonnen.

160. Zwei feste Körper rollen aufeinander. Auf jeder Oberfläche denken wir uns die Rollspur vorgeschrieben. Im

*) Dieser Ausspruch bezieht sich selbstverständlich auf die kinematische und nicht auf die rein geometrische Auffassung, welche schon bei Monge auftritt.

**) Man vergleiche wegen einer mehr synthetischen Darstellung Thomson und Tait „Natural Philosophy". Part I, pag. 94.

Kontaktpunkt müssen dann die Normalen der Flächen, sowie die Tangenten der Spuren übereinstimmen. Da also $\bar{\sigma}$ und $\bar{\varepsilon}$ für beide Oberflächen identisch sind, so ist dies auch mit $\bar{\varrho}$ der Fall und man erkennt, daß für die Rollbewegung zweier Oberflächen aufeinander die Begleitkörper der Spuren momentan zusammenfallen. In jedem der rollenden Körper stellt das Achsenkreuz des Begleitkörpers ein in ihm bewegliches Achsenkreuz vor, auf welches die momentane Rotation desselben bezogen wird. Unterscheiden wir also die Größen $\lambda, d\lambda, d\psi, d\chi$ je nachdem sie sich auf die eine oder die andere Spur beziehen mit den Indizes 1 und I, so sind die Winkelgeschwindigkeiten der rollenden Körper beziehungsweise

$$\bar{\omega}_1' = \left(\frac{d\lambda_1}{d\tau} - \frac{d\chi_1}{d\tau}\right)\bar{\sigma} + \sin\lambda_1 \frac{d\psi_1}{d\tau}\bar{\varepsilon} + \cos\lambda_1 \frac{d\psi_1}{d\tau}\bar{\varrho}$$

$$\bar{\omega}_I' = \left(\frac{d\lambda_I}{d\tau} - \frac{d\chi_I}{d\tau}\right)\bar{\sigma} + \sin\lambda_I \frac{d\psi_I}{d\tau}\bar{\varepsilon} + \cos\lambda_I \frac{d\psi_I}{d\tau}\bar{\varrho}\,.$$

Hierin sind alle Größen bekannt, sobald die Geschwindigkeit $u' = \frac{ds}{d\tau}$, mit welcher der Kontaktpunkt fortschreitet, gegeben ist. Mit Einführung derselben nehmen die Formeln die folgende Gestalt an:

$$\bar{\omega}_1' = \left[\left(\frac{d\lambda_1}{ds} - \frac{d\chi_1}{ds}\right)\bar{\sigma} + \sin\lambda_1 \frac{d\psi_1}{ds}\bar{\varepsilon} + \cos\lambda_1 \frac{d\psi_1}{ds}\bar{\varrho}\right]u'$$

$$\bar{\omega}_I' = \left[\left(\frac{d\lambda_I}{ds} - \frac{d\chi_I}{ds}\right)\bar{\sigma} + \sin\lambda_I \frac{d\psi_I}{ds}\bar{\varepsilon} + \cos\lambda_I \frac{d\psi_I}{ds}\bar{\varrho}\right]u'.$$

In diesen Gleichungen ist die Kinematik des Rollens zur vollständigen analytischen Darstellung gelangt, so daß alle weiteren Betrachtungen nur Folgerungen aus denselben sein können.

161. Rollen eines starren Körpers auf einer ruhenden Fläche bei gegebenen Spuren. Man erteile jetzt den beiden bisher in Bewegung gedachten Körpern die Winkelgeschwindigkeit $-\bar{\omega}_1'$, so kommt der eine zur Ruhe und die Rollbewegung des andern wird dargestellt durch die Rotation $\omega_I' - \omega_1' = \bar{\omega}$ um eine durch den Kontaktpunkt gehende Drehachse. Es wird also

$$\bar{\omega} = u'\left[\left(\frac{d\lambda_I}{ds} - \frac{d\lambda_1}{ds}\right) - \left(\frac{d\chi_I}{ds} - \frac{d\chi_1}{ds}\right)\right]\bar{\sigma}$$
$$+ u'\left[\sin\lambda_I \frac{d\psi_I}{ds} - \sin\lambda_1 \frac{d\psi_1}{ds}\right]\bar{\varepsilon}$$
$$+ u'\left[\cos\lambda_I \frac{d\psi_I}{ds} - \cos\lambda_1 \frac{d\psi_1}{ds}\right]\bar{\varrho}\,.$$

Die kinematische Bedeutung der einzelnen Komponenten von $\bar{\omega}$ ist vollkommen klar. Das erste Glied

$$\omega_\sigma = u'\left[\frac{d\lambda_I}{ds} - \frac{d\lambda_1}{ds} - \left(\frac{d\chi_I}{ds} - \frac{d\chi_1}{ds}\right)\right]$$

entspricht dem Wanken des rollenden Körpers um die Achse der Spur. Das zweite Glied

$$\omega_\varepsilon = u' \cdot \left(\sin\lambda_I \frac{d\psi_I}{ds} - \sin\lambda_1 \frac{d\psi_1}{ds}\right)$$

stellt das Schlingern*) des rollenden Körpers dar und das dritte Glied

$$\omega_\varrho = u'\left(\cos\lambda_I \frac{d\psi_I}{ds} - \cos\lambda_1 \frac{d\psi_1}{ds}\right)$$

gibt das Fortrollen um die Querachse der Spur.

Man kennt auch jetzt die Geschwindigkeit $\bar{v}$ eines beliebigen Systempunktes des rollenden Körpers. Denn bezeichnet man die absolute Lage des momentanen Kontaktpunktes mit $\bar{z}'$ und diejenige des Systempunktes mit $\bar{z}$, so ist

$$\bar{v} = \overline{\omega(z - z')}\,.$$

162. Freies Rollen. Bisher haben wir uns, um den Einblick in den Prozeß der Rollbewegung zu erleichtern, nach dem Vorgange von Thomson und Tait auf das zwangläufige Rollen beschränkt. Es bleibt nun zu zeigen, daß diese anscheinend spezielle Vorstellung tatsächlich ganz allgemein ist.

Wir denken uns — wie in Nr. 163 — die stützende Fläche und die rollende Fläche in der Parameterform gegeben, so daß

$$d\bar{x} = \bar{e}_1 \cdot d\varphi_1 + \bar{e}_2 \cdot d\varphi_2 = \bar{e}_I \cdot d\varphi_I + \bar{e}_{II} d\varphi_{II}$$

*) Das Schlingern hat man auch häufig als Pivotieren bezeichnet.

wird. Hier sind $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_I, \bar{e}_{II}$ die in Nr. 55 definierten Begleitvektoren. Die Einheitsstrecken $\bar{\sigma}, \bar{\nu}, \bar{\eta}$ sind jetzt bekannte Funktionen der Parameter φ, und die Flächennormale wird ausgedrückt durch

$$\bar{\varepsilon} = \overline{e_1 e_2} : \overline{e_1 e_2}\,,$$

sowie die entsprechende Formel für die rollende Fläche. Aus

$$\bar{\varepsilon} = \cos\lambda \cdot \bar{\nu} + \sin\lambda \cdot \bar{\eta}$$

folgt, indem wir die Indizes weglassen

$$\cos\lambda = \bar{\nu}\,\bar{\varepsilon}\,,$$

also nach Nr. 26

$$\cos\lambda = \frac{r}{ds^2} \cdot \bar{\varepsilon}\, d^2\bar{x}\,.$$

Ebenso einfach erhält man

$$\sin\lambda = \bar{\varepsilon}\,\overline{\sigma\nu} = \frac{r}{ds^3} \cdot \bar{\varepsilon}\,\overline{dx\, d^2x}\,.$$

Hieraus gewinnt man durch Differentiieren:

$$\cos\lambda \cdot d\lambda = d\bar{\varepsilon}\,\overline{\sigma\nu} + \bar{\varepsilon}\,\overline{\sigma\, d\nu}$$

und da $\overline{\sigma\nu} = \bar{\eta}$ und $\overline{d\sigma\nu} = 0$ ist,

$$\cos\lambda \cdot d\lambda = d\bar{\varepsilon}\,\bar{\eta} + (\cos\lambda \cdot \bar{\nu} + \sin\lambda \cdot \bar{\eta})\, d\bar{\eta}\,,$$

also

$$\cos\lambda \cdot d\lambda = d\bar{\varepsilon}\,\bar{\eta} + \cos\lambda \cdot \bar{\nu}\, d\bar{\eta}\,.$$

Nach Nr. 27 ist aber

$$\bar{\nu}\, d\bar{\eta} = \frac{ds}{r'}$$

und demnach

$$\cos\lambda \frac{d\lambda}{ds} = \frac{d\bar{\varepsilon}}{ds}\,\bar{\eta} + \frac{\cos\lambda}{r'}\,.$$

Setzt man hier noch

$$\bar{\eta} = \frac{r}{ds^3}\,\overline{dx\, d^2x}$$

und

$$\frac{1}{r'} = \frac{d\chi}{ds}\,,$$

so wird

$$\frac{d\lambda}{ds} - \frac{d\chi}{ds} = \frac{1}{\cos\lambda}\,\frac{r}{ds^4} \cdot d\bar{\varepsilon}\,\overline{dx\, d^2x}$$

und man erkennt, daß alle in den Entwicklungen von Nr. 161 vorkommenden Größen durch die Parameter der stützenden und rollenden Fläche, sowie ihre Differentiale explizit darstellbar sind. Durch Einführung derselben in die Formel für ω (Nr. 161) gewinnt man den fertigen Ausdruck der Winkelgeschwindigkeit bei der freien Rollbewegung.

163. Analytischer Ansatz des allgemeinen Rollproblems. Durch einen festen Punkt O des Raumes legen wir ein rechtwinkliges ruhendes Achsenkreuz $O_{1,2,3}$ und beziehen darauf die Koordinaten der ruhenden Fläche. Sie mögen durch zwei Parameter φ_1, φ_2 ausgedrückt sein, so daß

$$\text{(a)} \qquad x'_1 = F_1(\varphi_1, \varphi_2), \quad x'_2 = F_2(\varphi_1, \varphi_2), \quad x'_3 = F_3(\varphi_1, \varphi_2)$$

die ruhende Fläche darstellen.

In dem rollenden Körper nehmen wir einen beliebigen mit ihm fest verbundenen Punkte C, dessen absolute Koordinaten c_1, c_2, c_3 sind, und ein Achsenkreuz $C_{I,II,III}$, auf welches wir die Punkte der beweglichen Oberfläche beziehen. Ihre Koordinaten seien ausgedrückt durch die Gleichungen:

$$\text{(b)} \qquad \xi'_I = f_I(\varphi_I, \varphi_{II}), \quad \xi'_{II} = f_{II}(\varphi_I, \varphi_{II}), \quad \xi'_{III} = f_{III}(\varphi_I, \varphi_{II}).$$

Zwischen den beiden Koordinatensätzen bestehen die Beziehungen:

$$\text{(c)} \qquad \begin{cases} x'_1 - c_1 = \varepsilon_{I1} \cdot \xi'_I + \varepsilon_{II1} \cdot \xi'_{II} + \varepsilon_{III1} \cdot \xi'_{III}, \\ x'_2 - c_2 = \varepsilon_{I2} \cdot \xi'_I + \varepsilon_{II2} \cdot \xi'_{II} + \varepsilon_{III2} \cdot \xi'_{III}, \\ x'_3 - c_3 = \varepsilon_{I3} \cdot \xi'_I + \varepsilon_{II3} \cdot \xi'_{II} + \varepsilon_{III3} \cdot \xi'_{III}, \end{cases}$$

worin die neun Koeffizienten ε Funktionen (Nr. 114) der drei Eulerschen Positionswinkel*) α, β, γ sind.

Für beide Spurkurven führen wir jetzt die Begleitvektoren

$$\frac{\partial \overline{x'}}{\partial \varphi_1} = \overline{e'_1}, \qquad \frac{\partial \overline{x'}}{\partial \varphi_2} = \overline{e'_2}, \qquad \frac{\partial (\overline{x' - c})}{\partial \varphi_I} = \overline{e'_I}, \qquad \frac{\partial (\overline{x' - c})}{\partial \varphi_{II}} = \overline{e'_{II}}$$

ein. Damit nun die Wegelemente des Kontaktpunktes übereinstimmen, muß

$$\text{(d)} \qquad \overline{e'_1} \cdot d\varphi_1 + \overline{e'_2} \cdot d\varphi_2 = \overline{e'_I}\, d\varphi_I + \overline{e'_{II}}\, d\varphi_{II}$$

sein, gleichbedeutend mit den Komponentengleichungen:

$$\text{(d')} \qquad \begin{cases} e'_{11} \cdot d\varphi_1 + e'_{21} \cdot d\varphi_2 = e'_{I1} \cdot d\varphi_I + e'_{II1} \cdot d\varphi_{II}, \\ e'_{12} \cdot d\varphi_1 + e'_{22} \cdot d\varphi_2 = e'_{I2} \cdot d\varphi_I + e'_{II2} \cdot d\varphi_{II}, \\ e'_{13} \cdot d\varphi_1 + e'_{23} \cdot d\varphi_2 = e'_{I3} \cdot d\varphi_I + e'_{II3} \cdot d\varphi_{II}. \end{cases}$$

*) Diese Winkel sind in Nr. 114 mit φ, ψ, χ bezeichnet.

Hierzu tritt noch die Forderung, daß die Normalen beider Flächen in dem Kontaktpunkte übereinstimmen müssen, was durch die Gleichung

$$\text{(e)} \qquad \frac{\overline{e_1' e_2'}}{|\overline{e_1' e_2'}|} = \frac{\overline{e_I' e_{II}'}}{|\overline{e_I' e_{II}'}|}$$

zum Ausdrucke gebracht wird, oder wenn man die Zerlegung nach dem Koordinatensystem $O_{1,2,3}$ einführt, durch

$$\text{(e}'\text{)} \qquad \frac{e_{12}' e_{23}' - e_{13}' e_{22}'}{e_{I2}' e_{II3}' - e_{I3}' e_{II2}'} = \frac{e_{13}' e_{21}' - e_{11}' e_{23}'}{e_{I3}' e_{II1}' - e_{I1}' e_{II3}'} = \frac{e_{11}' e_{22}' - e_{12}' e_{21}'}{e_{I1}' e_{II2}' - e_{I2}' e_{II1}'}\,.$$

Diese Doppelgleichung enthält zwei unabhängige Relationen zwischen den Eulerschen Winkeln α, β, γ und den Parametern $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_I, \varphi_{II}$.

Offenbar genügen zur Positionsbestimmung des rollenden Körpers die sieben Größen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_I, \varphi_{II}, \alpha, \beta, \gamma$. Unter diesen sieben Variablen bestehen nach (e) zwei Gleichungen, so daß fünf unabhängige Bestimmungsstücke bleiben, durch die sich dann auch nach Formel (c) die Größe $\bar{c}$ ausdrücken läßt. Wenn nun Rollen ohne Gleiten stattfinden soll, so geben die Gleichungen (d) noch zwei weitere unabhängige Gleichungen zwischen den Differentialen, so daß der rollende Körper im unendlich Kleinen noch drei Freiheitsgrade besitzt, womit ausgedrückt ist, daß $\overline{\omega}$ in jedem Momente noch willkürlich gewählt werden kann.

Ist im besonderen Falle die ruhende Fläche eine Ebene, dann nimmt man die 3-Achse senkrecht darauf und setzt $\varphi_1 = x_1'$, $\varphi_2 = x_2'$. Der Vektor der Flächennormale $\overline{e_I' e_{II}'} : |\overline{e_I' e_{II}'}|$ fällt demnach in die 3-Achse und die Gleichungen (e′) werden durch die folgenden ersetzt

$$\text{(e}''\text{)} \qquad e_{I2}' e_{II3}' - e_{I3}' e_{II2}' = 0\,, \quad e_{I3}' e_{II1}' - e_{I1}' e_{II3}' = 0\,,$$

wo

$$e_{I1}' = \varepsilon_{I1} \frac{\partial z_I'}{\partial \varphi_I} + \varepsilon_{II1} \frac{\partial z_{II}'}{\partial \varphi_I} + \varepsilon_{III1} \frac{\partial z_{III}'}{\partial \varphi_I}$$

$$e_{I2}' = \varepsilon_{I2} \frac{\partial z_I'}{\partial \varphi_I} + \varepsilon_{II2} \frac{\partial z_{II}'}{\partial \varphi_I} + \varepsilon_{III2} \frac{\partial z_{III}'}{\partial \varphi_I}$$

$$e_{I3}' = \varepsilon_{I3} \frac{\partial z_I'}{\partial \varphi_I} + \varepsilon_{II3} \frac{\partial z_{II}'}{\partial \varphi_I} + \varepsilon_{III3} \frac{\partial z_{III}'}{\partial \varphi_I}$$

$$e'_{II1} = \varepsilon_{I1}\frac{\partial \mathfrak{z}'_I}{\partial \varphi_{II}} + \varepsilon_{II1}\frac{\partial \mathfrak{z}'_{II}}{\partial \varphi_{II}} + \varepsilon_{III1}\frac{\partial \mathfrak{z}'_{III}}{\partial \varphi_{II}}$$

$$e'_{II2} = \varepsilon_{I2}\frac{\partial \mathfrak{z}'_I}{\partial \varphi_{II}} + \varepsilon_{II2}\frac{\partial \mathfrak{z}'_{II}}{\partial \varphi_{II}} + \varepsilon_{III2}\frac{\partial \mathfrak{z}'_{III}}{\partial \varphi_{II}}$$

$$e'_{II3} = \varepsilon_{I3}\frac{\partial \mathfrak{z}'_I}{\partial \varphi_{II}} + \varepsilon_{II3}\frac{\partial \mathfrak{z}'_{II}}{\partial \varphi_{II}} + \varepsilon_{III3}\frac{\partial \mathfrak{z}'_{III}}{\partial \varphi_{II}}$$

zu nehmen ist.

Nach einer leichten Umformung lassen sich die Gleichungen (e'') auch in der folgenden Weise schreiben

$$(\mathrm{e}''')\quad\begin{cases}
\varepsilon_{I1}\left(\frac{\partial \mathfrak{z}'_{II}}{\partial \varphi_I}\frac{\partial \mathfrak{z}'_{III}}{\partial \varphi_{II}} - \frac{\partial \mathfrak{z}'_{II}}{\partial \varphi_{II}}\frac{\partial \mathfrak{z}'_{III}}{\partial \varphi_I}\right) + \varepsilon_{II1}\left(\frac{\partial \mathfrak{z}'_{III}}{\partial \varphi_I}\frac{\partial \mathfrak{z}'_I}{\partial \varphi_{II}} - \frac{\partial \mathfrak{z}'_{III}}{\partial \varphi_{II}}\frac{\partial \mathfrak{z}'_I}{\partial \varphi_I}\right) \\
\qquad + \varepsilon_{III1}\left(\frac{\partial \mathfrak{z}'_I}{\partial \varphi_I}\frac{\partial \mathfrak{z}'_{II}}{\partial \varphi_{II}} - \frac{\partial \mathfrak{z}'_I}{\partial \varphi_{II}}\frac{\partial \mathfrak{z}'_{II}}{\partial \varphi_I}\right) = 0\,, \\
\varepsilon_{I2}\left(\frac{\partial \mathfrak{z}'_{II}}{\partial \varphi_I}\frac{\partial \mathfrak{z}'_{III}}{\partial \varphi_{II}} - \frac{\partial \mathfrak{z}'_{II}}{\partial \varphi_{II}}\frac{\partial \mathfrak{z}'_{III}}{\partial \varphi_I}\right) + \varepsilon_{II2}\left(\frac{\partial \mathfrak{z}'_{III}}{\partial \varphi_I}\frac{\partial \mathfrak{z}_I}{\partial \varphi_{II}} - \frac{\partial \mathfrak{z}'_{III}}{\partial \varphi_{II}}\frac{\partial \mathfrak{z}_I}{\partial \varphi_I}\right) \\
\qquad + \varepsilon_{III2}\left(\frac{\partial \mathfrak{z}'_I}{\partial \varphi_I}\frac{\partial \mathfrak{z}'_{II}}{\partial \varphi_{II}} - \frac{\partial \mathfrak{z}'_I}{\partial \varphi_{II}}\frac{\partial \mathfrak{z}'_{II}}{\partial \varphi_I}\right) = 0\,.
\end{cases}$$

Man hätte dieselben auch ohne weiteres ansetzen können, denn sie drücken unmittelbar aus, daß die Flächennormale des rollenden Körpers auf der ruhenden Ebene beständig senkrecht steht.

Die Gleichungen (d') werden ersetzt durch

$$(\mathrm{d}'')\quad\begin{cases}
dx'_1 = e'_{I1}\cdot d\varphi_I + e'_{II1}\cdot d\varphi_{II} \\
dx'_2 = e'_{I2}\cdot d\varphi_I + e'_{II2}\cdot d\varphi_{II} \\
\;\;0 = e'_{I3}\cdot d\varphi_I + e'_{II3}\cdot d\varphi_{II}\,.
\end{cases}$$

Aufgabe 60. Um in einem konkreten Falle die allgemeinen Rollbedingungen besser überblicken zu können, empfehlen wir dem Studierenden die Gleichungen (d'') und (e'') für einen körperlichen Ring (Torus), der durch Rotation eines Kreises vom Radius a um eine Achse in der Mittelpunktentfernung r entsteht, durchzuführen. Die Gleichungen der rollenden Fläche sind jetzt*)

$$\mathfrak{z}'_I = (r + a\cos\varphi_I)\cos\varphi_{II}\,,\quad \mathfrak{z}'_{II} = (r + a\cos\varphi_I)\sin\varphi_{II}\,,\quad \mathfrak{z}'_{III} = a\sin\varphi_I\,.$$

*) Wegen der Indizesbezeichnung möge hier bemerkt werden, daß dieselbe nur bei den allgemeinen Entwicklungen angebracht ist. Bei speziellen Durchführungen läßt man sie nach Möglichkeit fallen.

164. Das Abschroten der Axoide. Während bei der Planbewegung die Spurkurve und Polkurve beliebig angenommen werden können, bestehen für die beiden Regelflächen, deren Abschrotung einer allgemeinen Bewegung der betreffenden starren Körper äquivalent sind, gewisse Bedingungen des Anpassens (raccordement). Sie wurden vom Gesichtspunkte der Kinematik zuerst von Bour (Cours de mécanique et machines Bd. 1, pag. 139) klar ausgesprochen.

Ein Axoid ist das Analogon zur Kurve im Raume und wird erhalten, indem man die Parameter der geraden Linie

$$\overline{\eta(x-e)} = 0$$

als eindeutige Funktionen einer unabhängigen Variablen ψ auffaßt. Dementsprechend stellen also die Gleichungen

$$\text{(a)} \qquad \bar{\eta} = \bar{\lambda}(\psi), \quad \bar{e} = \bar{f}(\psi), \quad \eta^2 = 1$$

eine bestimmte Regelfläche dar. Die einzelnen Geraden oder Erzeugenden derselben werden durchlaufen, wenn ψ die aufeinander folgenden Werte innerhalb eines bestimmten Intervalles annimmt. Da wir die Bedingungen des Abschrotens auf analytischem Wege ableiten wollen, müssen wir die in Betracht kommenden geometrischen Begriffe zunächst einführen.

165. Kürzester Abstand zwischen zwei benachbarten Erzeugenden einer Regelfläche. Aus den Gleichungen (a) (Nr. 164), welche bei gegebenem ψ eine bestimmte Erzeugende definieren, leiten wir eine unendlich nahe folgende ab, indem wir

$$\bar{\eta}' = \bar{\eta} + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \psi} \cdot d\psi \quad \text{und} \quad \bar{e}' = \bar{e} + \frac{\partial \bar{e}}{\partial \psi} d\psi$$

nehmen. Nach Nr. 22 ist der kürzeste Abstand der Geraden

$$\overline{\eta z} = \bar{m}, \quad \overline{\eta' z} = \bar{m}'$$

bestimmt durch den Ausdruck

$$k = \frac{\bar{\eta}\,\bar{m}' + \bar{\eta}'\bar{m}}{\overline{\eta\,\eta'}}.$$

Setzt man hierin

$$\bar{m} = \overline{\eta e}, \quad \bar{m}' = \overline{\eta e'},$$

so wird

$$k = \frac{\overline{\eta\,\eta'} \cdot \overline{e' - e}}{\cdot\, \overline{\eta\,\eta'}},$$

also in unserem Falle, wenn wir k durch dk ersetzen,

$$dk = \frac{\frac{\partial \bar{e}}{\partial \psi} \cdot \overline{\eta \frac{\partial \eta}{\partial \psi}}}{\overline{\eta \frac{\partial \eta}{\partial \psi}}} \cdot d\psi .$$

Hierin ist $\overline{\eta \frac{\partial \eta}{\partial \psi}} \cdot d\psi = d\gamma$ der Winkel zwischen den benachbarten Erzeugenden. Man bezeichnet nun die Größe

$$\text{(c)} \qquad \pi^* = \frac{dk}{d\gamma} = \frac{\frac{\partial \bar{e}}{\partial \psi} \cdot \overline{\eta \frac{\partial \eta}{\partial \psi}}}{\overline{\eta \frac{\partial \eta}{\partial \psi}}^2}$$

als den Parameter der Erzeugenden.

166. Zentralpunkt und Zentralebene der Erzeugenden. Die Vektoren des laufenden Punktes der Geraden

$$\overline{\eta(z - e)} = 0 , \quad \overline{\eta'(z - e')} = 0$$

sind

$$\bar{z} = \bar{e} + l \cdot \bar{\eta} , \quad \bar{z}' = \bar{e}' + l' \cdot \bar{\eta}',$$

worin l und l' ihre Abstände von den Punkten $\bar{e}$ und $\bar{e}'$ bedeuten. Nun folgt*) aus der Anschauung unmittelbar die Beziehung

$$\text{(d)} \qquad \bar{e} + l \cdot \bar{\eta} + \bar{k} = \bar{e}' + l' \cdot \bar{\eta}'$$

für diejenigen Werte von l und l', welche den Fußpunkten des kürzesten Abstandes $\bar{k} = \frac{k}{\overline{\overline{\eta \eta'}}} \cdot \overline{\eta \eta'}$ entsprechen.

Setzen wir also $\overline{\eta \eta'} = \sin\gamma$, so wird nach (d):

$$l = \overline{e' - e} \cdot \bar{\eta} + l' \cos\gamma$$

$$l \cos\gamma = \overline{e' - e} - \bar{\eta}' + l'$$

und

$$\sin^2\gamma \cdot \overline{z^* - e} = [(\bar{\eta} - \cos\gamma \cdot \bar{\eta}') \cdot \overline{e' - e}] \cdot \bar{\eta}$$

gibt den Vektor $\bar{z}^*$ des Fußpunktes auf der Geraden $\overline{\eta(z - e)} = 0$. Dieses Resultat wenden wir auf unseren

*) Die hier gegebene Ableitung für den Fußpunktvektor des kürzesten Abstandes ist der Darstellung in F. Schur, Analytische Geometrie, Leipzig 1898, S. 135 entnommen.

Fall der benachbarten Erzeugenden an, setzen also wie in Nr. 165:

$$\overline{e'-e} = \frac{\partial\bar e}{\partial\psi}\cdot d\psi\,, \qquad \overline{\eta\,\eta'} = \overline{\eta\,\frac{\partial\eta}{\partial\psi}}\cdot d\psi$$

und erhalten sofort

$$\text{(e)} \qquad \overline{z^*-e} = -\frac{\dfrac{\partial\bar e}{\partial\psi}\cdot\dfrac{\partial\bar\eta}{\partial\psi}}{\overline{\eta\,\dfrac{\partial\eta}{\partial\psi}}^{\,2}} - \bar\eta\,.$$

Dieser durch den Vektor $\bar z^*$ definierte Punkt der Erzeugenden wird von Bour der Zentralpunkt derselben genannt.

Aus $\bar z = \bar e + l\cdot\bar\eta$ folgt

$$d\bar z = \left(\frac{\partial\bar e}{\partial\psi} + l\cdot\frac{\partial\bar\eta}{\partial\psi}\right)\cdot d\psi + \bar\eta\cdot dl\,.$$

Mithin hat der Vektor

$$\text{(f)} \qquad \bar n = \overline{\eta\,\frac{\partial e}{\partial\psi}} + l\cdot\overline{\eta\,\frac{\partial\eta}{\partial\psi}}$$

die Richtung der Normale zur Tangentialebene der Regelfläche. Für den Zentralpunkt wird

$$\bar n^* = \overline{\eta\,\frac{\partial e}{\partial\psi}} + l^*\cdot\overline{\eta\,\frac{\partial\eta}{\partial\psi}}$$

oder

$$\bar n^* = \overline{\eta\,\frac{\partial e}{\partial\psi}} - \frac{\dfrac{\partial\bar e}{\partial\psi}\,\dfrac{\partial\bar\eta}{\partial\psi}}{\overline{\eta\,\dfrac{\partial\eta}{\partial\psi}}^{\,2}}\cdot\overline{\eta\,\frac{\partial\eta}{\partial\psi}}\,,$$

d. h.

$$\bar n^* = \frac{\overline{\left(\eta\,\dfrac{\partial\eta}{\partial\psi}\right)\left[\left(\eta\,\dfrac{\partial e}{\partial\psi}\right)\left(\eta\,\dfrac{\partial\eta}{\partial\psi}\right)\right]}}{\overline{\eta\,\dfrac{\partial\eta}{\partial\psi}}^{\,2}}\,.$$

Hieraus folgt mit Berücksichtigung von Gleichung (c) die einfache Formel

$$\text{(g)} \qquad \bar n^* = \pi^*\cdot\frac{\partial\bar\eta}{\partial\psi}\,.$$

Die Tangentialebene im Zentralpunkte heißt die Zentralebene der Erzeugenden.

167. Bedingungen des Abschrotens der Axoide. Es fragt sich nun, welche Neigung (χ^*) hat die Tangentialebene in einem beliebigen Punkte der Erzeugenden gegen die Zentralebene. Zu diesem Zwecke bilden wir zunächst

$$\overline{n\,n^*} = \pi^* \left[- \frac{\frac{\partial \bar{e}}{\partial \psi}\,\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \psi}}{\overline{\eta\,\frac{\partial \eta}{\partial \psi}}^2} \cdot \overline{\left(\eta\,\frac{\partial e}{\partial \psi}\right)\left(\eta\,\frac{\partial \eta}{\partial \psi}\right)} + l \cdot \overline{\left(\eta\,\frac{\partial \eta}{\partial \psi}\right)\left(\eta\,\frac{\partial e}{\partial \psi}\right)} \right].$$

Da nach der Entwicklungsformel

$$\overline{\left(\eta\,\frac{\partial \eta}{\partial \psi}\right)\left(\eta\,\frac{\partial e}{\partial \psi}\right)} = \left[\overline{\eta\,\frac{\partial \eta}{\partial \psi}} \cdot \frac{\partial \bar{e}}{\partial \psi}\right] \bar{\eta}$$

wird, so findet man

$$\overline{n\,n^*} = \pi^* \left[\left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial \psi}\,\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \psi}\right) + l \cdot \left(\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \psi}\right)^2\right] \bar{\eta}\,.$$

Zweitens bilde man

$$\bar{n}\,\bar{n}^* = \pi^* \left(\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \psi} \cdot \overline{\eta\,\frac{\partial e}{\partial \psi}}\right).$$

Nach diesen Vorbereitungen ist der Neigungswinkel χ^* bekannt, denn man hat

$$\operatorname{tg}\chi^* = \frac{\overline{n\,n^*}}{\bar{n}\,\bar{n}^*} = \frac{1}{\pi^*}\,\frac{\frac{\partial \bar{e}}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \psi} + l \cdot \left(\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \psi}\right)^2}{\bar{\eta} \cdot \overline{\frac{\partial e}{\partial \psi}\,\frac{\partial \eta}{\partial \psi}}}\,.$$

Berücksichtigt man noch die Beziehung

$$l - l^* = l + \frac{\frac{\partial \bar{e}}{\partial \psi}\,\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \psi}}{\overline{\eta\,\frac{\partial \eta}{\partial \psi}}^2} = \frac{l \cdot \overline{\eta\,\frac{\partial \eta}{\partial \psi}}^2 + \frac{\partial \bar{e}}{\partial \psi}\,\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \psi}}{\overline{\eta\,\frac{\partial \eta}{\partial \psi}}^2},$$

so erhält man die Chaslessche Formel

$$\text{(h)} \qquad \operatorname{tg}\chi^* = \frac{l - l^*}{\pi^*}$$

und den entsprechenden Satz:

Haben zwei Regelflächen je eine ihrer Erzeugenden und die zugehörigen Zentralebenen gemeinsam, dann fallen auch die Tangentialebenen derjenigen Punkte der Erzeugenden zusammen, die gleichen Abstand von dem gemeinsamen Zentralpunkte besitzen, wenn die Parameter beider Flächen übereinstimmen.

In diesem Falle können also auch die gegebenen Axoide voneinander abschroten und diese Bewegung setzt sich zusammen aus einer Translation längs der Erzeugenden, welche ihre Zentralpunkte zur Deckung bringt und einer Rotation, deren Amplitude gleich dem Neigungswinkel der korrespondierenden Zentralebene ist.

Als ein sehr einfaches Beispiel wollen wir den Fall

$$\bar{e} = \cos\psi \cdot \bar{a} + \sin\psi \cdot \overline{\varepsilon\, \bar{a}}\,, \quad \varepsilon^2 = 1 \tag{1}$$

$$\bar{\eta} = \cos\alpha \cdot \bar{\varepsilon} + \frac{\sin\alpha}{a}(\cos\psi \cdot \overline{\varepsilon\, \bar{a}} - \sin\psi \cdot \bar{a}) \tag{2}$$

betrachten. Alle Erzeugenden schneiden jetzt einen Kreis mit dem Radius a, auf dessen Fläche $\bar{\varepsilon}$ senkrecht steht. Aus $\bar{\eta}\,\bar{\varepsilon} = \cos\alpha$ schließt man, daß alle Erzeugenden einen konstanten Winkel α mit der Achse $\bar{\varepsilon}$ bilden. Unsere Regelfläche ist also ein einschaliges Rotationshyperboloid.

Man findet nun

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial \psi} = -\sin\psi \cdot \bar{a} + \cos\psi \cdot \overline{\bar{e}\, \bar{a}}\,, \quad \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \psi} = -\frac{\sin\alpha}{a} \cdot \bar{e}\,,$$

$$\overline{\eta \frac{\partial \eta}{\partial \psi}} = \bar{\varepsilon} - \cos\alpha \cdot \bar{\eta}\,, \quad \overline{\eta \frac{\partial \eta}{\partial \alpha}}^2 = \sin^2\alpha\,,$$

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \psi} \cdot \overline{\eta \frac{\partial \eta}{\partial \psi}} = -a \sin\alpha \cos\alpha\,.$$

Folglich für den Parameter:

$$\pi^* = -a \operatorname{ctg}\alpha\,, \quad \overline{z^* - e} = l^* = 0\,.$$

Der durch Gleichung (1) dargestellte Kreis (Kehlkreis) enthält alle Zentralpunkte. Zwei Hyperboloide mit den Kehlkreisradien a_1, a_I und den Neigungswinkeln α_1, α_I können daher nur dann aufeinander schroten, wenn die Bedingung

$$a_1 \operatorname{ctg}\alpha_1 = a_I \operatorname{ctg}\alpha_I$$

erfüllt ist.

Hiermit verlassen wir die Axoidbewegung, obwohl dies einem gewaltsamen Abbruch der vorstehenden elementaren Entwicklungen gleichkommt. Ein weiteres Eingehen würde namentlich die Ausführung der Verzahnungstheorie mit Rücksicht auf die praktischen Anwendungen erfordern. Dieses Gebiet wird aber besser in der technischen Mechanik behandelt.

C) Systemgrößen für den starren Körper.

168. Primitive und abgeleitete Systemgrößen. Die kinematischen Fundamentalvektoren des starren Körpers: Translationsgeschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit, sowie ihre Kombinationen (z. B. $\overline{\omega\, t}$) und ihre Derivierten nach der Zeit beziehen sich nicht auf einzelne Punkte des Körpers (wenn sie auch von der Auswahl solcher Punkte eventuell abhängig sind), sondern auf das starre System als solches. Von dem Massenbegriffe sind sie durchaus unabhängig. Wir nennen dieselben primitive Systemgrößen zur klaren Unterscheidung von anderen Größen, die sich gleichfalls auf das ganze System beziehen, aber von der Massenverteilung wesentlich abhängen. Solche Systemgrößen, deren Definition die Berücksichtigung der Massen der einzelnen Elemente in sich schließt, wollen wir als abgeleitete Systemgrößen bezeichnen. Hierhin gehört die Gesamtmasse $\mu^* = S\,\mu$ eines starren Körpers oder eines Systems derartiger Körper, ferner der Begriff des Schwerpunktes, der Trägheitsmomente und die wichtigsten kinematischen Systemvektoren, welche in diesem Kapitel zu entwickeln sind.

169. Skalare und gerichtete Systemgrößen. Ungerichtete (skalare) Elementargrößen wie z. B. $E = \frac{1}{2} v^2$ liefern durch Summation über alle Massenpunkte auch skalare Systemgrößen. So ist

$$\mathbf{E} = \tfrac{1}{2} S\,\mu\, v^2$$

die Summe der kinetischen Energien der einzelnen Massenpunkte des starren (oder auch veränderlichen) Körpers die kinetische Energie desselben. Der Vektor des Schwerpunktes eines materiellen Systems ist eine gerichtete Systemgröße.

170. Definition des Schwerpunktes. Für ein starres (oder veränderliches) System materieller Punkte $\mu', \mu'', \mu''', \ldots$ mit

den Positionsvektoren $\bar{x}', \bar{x}'', \bar{x}''', \ldots$ (Fig. 86)*) ist der Schwerpunkt $\bar{x}^*$ definiert durch die Beziehung

(a)
$$\Sigma \mu \bar{x} = \bar{x}^* \cdot \Sigma \mu = \mu^* \cdot \bar{x}^* .$$

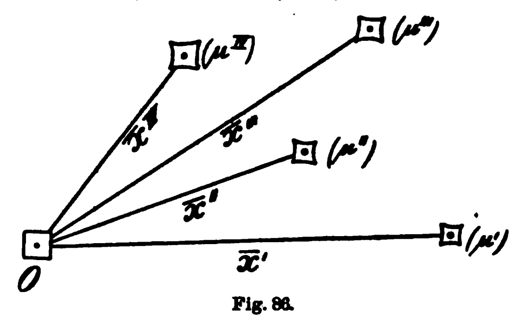


Fig. 86.

Bilden die Massenpunkte ein stetiges System, so gehen die Summationen in Integrale über.

Es läßt sich leicht zeigen, daß die Lage des Schwerpunktes (S) im materiellen System von der Wahl des Bezugspunktes unabhängig ist. Von dem ursprünglichen Bezugspunkte O (Fig. 87) gehen wir zu einem neuen O' über, der von jenem um die Strecke $\bar{e}$ absteht. Dann ist

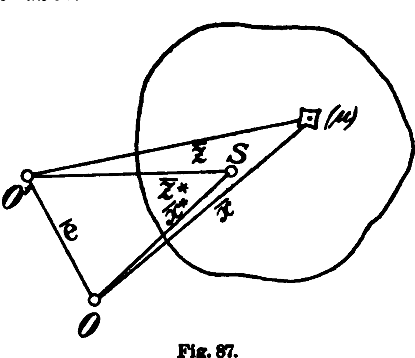


Fig. 87.

$$\bar{x} - \bar{z} - \bar{e} = 0$$

und

$$\Sigma \mu \cdot \bar{z} = \Sigma \mu \overline{x - e}$$

oder

$$\mu^* \cdot \bar{z}^* = \mu^* (\bar{x}^* - \bar{e}) .$$

Folglich $\bar{z}^* = \overline{x^* - e}$, womit die Behauptung erwiesen ist.

Häufig zerlegt man die Vektoren der Massenpunkte und des Schwerpunktes nach einem mit dem Körper fest ver-

*) Fehlen bei einer Figur die Pfeile, dann steht der Buchstabe konsequent auf dem rechten Ufer des Vektors. Dies ist zugleich die bequemste Bezeichnung des Richtungssinnes.

bundenen Achsenkreuz. Die Gleichungen (a) geben dann die Komponenten

$$\Sigma \mu \cdot x_1 = \mu^* \cdot x_1^*$$
$$\Sigma \mu \cdot x_2 = \mu^* \cdot x_2^*$$
$$\Sigma \mu \cdot x_3 = \mu^* \cdot x_3^*$$

oder bei stetiger Massenverteilung, indem man $\mu = \Pi\, dx_1\, dx_2\, dx_3$ setzt, wo Π die spezifische Dichte im Punkte (x_1, x_2, x_3) bedeutet,

$$x_1^* = \frac{\iiint \Pi x_1\, dx_1\, dx_2\, dx_3}{\iiint \Pi\, dx_1\, dx_2\, dx_3}, \quad x_2^* = \frac{\iiint \Pi x_2\, dx_1\, dx_2\, dx_3}{\iiint \Pi\, dx_1\, dx_2\, dx_3},$$

$$x_3^* = \frac{\iiint \Pi x_3\, dx_1\, dx_2\, dx_3}{\iiint \Pi\, dx_1\, dx_2\, dx_3}.$$

Π ist hier als Funktion der rechtwinkligen Koordinaten x_1, x_2, x_3 aufzufassen und die Grenzen der Integrale sind durch die Gestalt der Oberfläche des Körpers bestimmt. Die Ausführung der Integrale für gegebene Massenverteilungen und bestimmte gesetzmäßige Begrenzungen ist Sache der Integralrechnung, während die experimentelle Bestimmung des Schwerpunktes als eine wichtige Aufgabe der Dynamik (Bd. 2) zufällt.

171. Trägheitsmoment des starren Körpers in bezug auf eine bestimmte Achse. Die Linie durch CF sei eine Dreh-

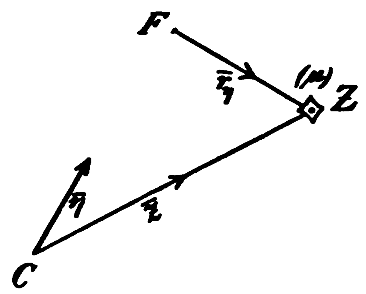


Fig. 88.

achse im starren Körper und Z ein Massenpunkt desselben. Den Abstand FZ dieses Punktes von der Drehachse bezeichnen wir mit $\bar{r}_\eta$. Nach Fig. 88 ist dann

$$\bar{r}_\eta = -\overline{\eta(\eta\, \bar{z})}, \quad r_\eta^2 = z^2 - (\overline{\eta}\, \bar{z})^2.$$

Die über alle Massenpunkte des Körpers ausgedehnte Summe

$$(a) \qquad T_\eta = S\mu r_\eta^2 = S\mu z^2 - S(\overline{\eta}\,\overline{z})^2$$

ist das **Trägheitsmoment** desselben in bezug auf die durch C und den Einheitsvektor $\overline{\eta}$ bestimmte Achse.

Für ein mit dem Körper fest verbundenes Achsenkreuz $C_{I,II,III}$ wird

$$r_I^2 = z_{II}^2 + z_{III}^2, \quad r_{II}^2 = z_{III}^2 + z_I^2, \quad r_{III}^2 = z_I^2 + z_{II}^2$$

und man erhält daher die entsprechenden Trägheitsmomente

$$(b) \quad T_I = S\mu(z_{II}^2 + z_{III}^2), \quad T_{II} = S\mu(z_{III}^2 + z_I^2), \quad T_{III} = S\mu(z_I^2 + z_{II}^2).$$

Zuweilen setzt man

$$T_\eta = \mu^* \cdot e_\eta^2$$

und nennt die Strecke e_η den **Trägheitsradius**.

Um den Zusammenhang von T_η mit T_I, T_{II}, T_{III} darzustellen, schreiben wir den Ausdruck

$$r_\eta^2 = z_I^2 + z_{II}^2 + z_{III}^2 - (\eta_I z_I + \eta_{II} z_{II} + \eta_{III} z_{III})^2$$

in der Form

$$(c) \quad \begin{cases} r_\eta^2 = \eta_I^2(z_{II}^2 + z_{III}^2) + \eta_{II}^2(z_{III}^2 + z_I^2) + \eta_{III}^2(z_I^2 + z_{II}^2) \\ \quad - 2\,\eta_{II}\eta_{III} \cdot z_{II} z_{III} - 2\,\eta_{III}\eta_I z_{III} z_I - 2\,\eta_I \eta_{II} z_I z_{II}. \end{cases}$$

Folglich wird

$$(d) \quad \begin{cases} T_\eta = \eta_I^2 \cdot T_I + \eta_{II}^2 \cdot T_{II} + \eta_{III}^2 \cdot T_{III} - 2\,\eta_{II}\eta_{III} \cdot D_I \\ \quad - 2\,\eta_{III}\eta_I \cdot D_{II} - 2\,\eta_I\eta_{II} \cdot D_{III}, \end{cases}$$

wenn

$$(e) \quad D_I = S\mu \cdot z_{II} z_{III}, \quad D_{II} = S\mu \cdot z_{III} z_I, \quad D_{III} = S\mu \cdot z_I z_{II}$$

gesetzt wird. Diese neuen Größen bezeichnet man als die Deviationsmomente des Körpers in bezug auf die Achsen C_I, C_{II}, C_{III} oder eigentlich in bezug auf die Ebenen, auf welchen diese Achsen senkrecht stehen.

172. Verhalten des Trägheitsmomentes bei einer Parallelverschiebung der Achse. Die ursprüngliche Achse, welche durch den Punkt O (Fig. 86) geht, werde durch Parallelverschiebung nach dem Punkte O' versetzt. Nach den Bezeichnungen in Nr. 170 ist

$$\overline{z} = \overline{x - e}$$

und deshalb

$$S\mu z^2 = S\mu \cdot \overline{x - e}^2 = S\mu x^2 + \mu^* e^2 - 2 S\mu \cdot \overline{e}\,\overline{x}.$$

Nun ist aber

$$S\mu\bar{x} = \mu^* \cdot \bar{x}^*,$$

also auch

$$S\mu \cdot (\bar{e}\bar{x}) = \mu^* \cdot (\bar{e}\bar{x}^*).$$

Die Trägheitsmomente T und T' um die Achsen O und O' stehen also in der Beziehung

$$T' = T + \mu^* e^2 - 2\mu^* e x^* \cos(\bar{x}^*/\bar{e}).$$

Für $x^* = 0$ oder $\bar{x} \perp \bar{e}$ geht die Relation in die einfachere

$$T' = T + \mu^* e^2$$

über, die sehr häufig angewendet wird.

173. Verhalten der Komponenten des Trägheitsmomentes bei einer Drehung des Koordinatensystems. Beziehen wir das Koordinatensystem $C_{I,II,III}$ auf ein im Raume ruhendes Achsenkreuz $C_{1,2,3}$, so bestehen die Beziehungen

$$\text{(a)} \quad \left\{ \begin{aligned} z_I &= \varepsilon_{1I} \cdot z_1 + \varepsilon_{2I} \cdot z_2 + \varepsilon_{3I} \cdot z_3, \\ z_{II} &= \varepsilon_{1II} \cdot z_1 + \varepsilon_{2II} \cdot z_2 + \varepsilon_{3II} \cdot z_3, \\ z_{III} &= \varepsilon_{1III} \cdot z_1 + \varepsilon_{2III} \cdot z_2 + \varepsilon_{3III} \cdot z_3, \\ \eta_I &= \varepsilon_{1I} \cdot \eta_1 + \varepsilon_{2I} \cdot \eta_2 + \varepsilon_{3I} \cdot \eta_3, \\ \eta_{II} &= \varepsilon_{1II} \cdot \eta_1 + \varepsilon_{2II} \cdot \eta_2 + \varepsilon_{3II} \cdot \eta_3, \\ \eta_{III} &= \varepsilon_{1III} \cdot \eta_1 + \varepsilon_{2III} \cdot \eta_2 + \varepsilon_{3III} \cdot \eta_3, \end{aligned} \right.$$

worin die ε bekannte Funktionen der drei Eulerschen Positionswinkel φ, ψ, ϑ (Nr. 114) sind.

Die Zerlegung nach den Achsen $C_{1,2,3}$ liefert

$$\text{(b)} \quad \left\{ \begin{aligned} T_\eta = \eta_1^2 \cdot T_1 + \eta_2^2 \cdot T_2 + \eta_3^2 \cdot T_3 - 2\eta_2\eta_3 \cdot D_1 \\ - 2\eta_3\eta_1 \cdot D_2 - 2\eta_1\eta_2 \cdot D_3. \end{aligned} \right.$$

Hierin ist

$$T_1 = S\mu(z_2^2 + z_3^2), \quad T_2 = S\mu(z_3^2 + z_1^2), \quad T_3 = S\mu(z_1^2 + z_2^2),$$
$$D_1 = S\mu z_2 z_3, \qquad D_2 = S\mu z_3 z_1, \qquad D_3 = S\mu z_1 z_2.$$

Man erkennt sofort, daß zwischen beiden Komponentenzerlegungen lineare Beziehungen*) von der Form

*) Eine eingehende Untersuchung dieser Beziehungen findet man bei Gibbs, Vektor-Analysis.

$$T_1 = \tau_{1I} \cdot T_I + \tau_{1II} \cdot T_{II} + \tau_{1III} \cdot T_{III} + \sigma_{1I} \cdot D_I + \sigma_{1II} \cdot D_{II} + \sigma_{1III} \cdot D_{III}$$
$$T_2 = \tau_{2I} \cdot T_I + \tau_{2II} \cdot T_{II} + \tau_{2III} \cdot T_{III} + \sigma_{2I} \cdot D_I + \sigma_{2II} \cdot D_{II} + \sigma_{2III} \cdot D_{III}$$
$$T_3 = \tau_{3I} \cdot T_I + \tau_{3II} \cdot T_{II} + \tau_{3III} \cdot T_{III} + \sigma_{3I} \cdot D_I + \sigma_{3II} \cdot D_{II} + \sigma_{3III} \cdot D_{III}$$

und die ganz analogen Ausdrücke für D_1, D_2, D_3.

Alle Koeffizienten τ, σ usw. sind eindeutige Funktionen der Eulerschen Positionswinkel. Hier interessiert uns nur eine bestimmte Drehung des Koordinatensystems, welche das Verschwinden der zugehörigen Deviationsmomente zur Folge hat.

174. Trägheitshauptachsen. Wir betrachten jetzt neben den Gleichungen (a) in Nr. 173 die inversen:

$$\text{(a')} \quad \begin{cases} z_1 = \varepsilon_{1I} \cdot z_I + \varepsilon_{1II} \cdot z_{II} + \varepsilon_{1III} \cdot z_{III}, \\ z_2 = \varepsilon_{2I} \cdot z_I + \varepsilon_{2II} \cdot z_{II} + \varepsilon_{2III} \cdot z_{III}, \\ z_3 = \varepsilon_{3I} \cdot z_I + \varepsilon_{3II} \cdot z_{II} + \varepsilon_{3III} \cdot z_{III}, \\ \eta_1 = \varepsilon_{1I} \cdot \eta_I + \varepsilon_{1II} \cdot \eta_{II} + \varepsilon_{1III} \cdot \eta_{III}, \\ \eta_2 = \varepsilon_{2I} \cdot \eta_I + \varepsilon_{2II} \cdot \eta_{II} + \varepsilon_{2III} \cdot \eta_{III}, \\ \eta_3 = \varepsilon_{3I} \cdot \eta_I + \varepsilon_{3II} \cdot \eta_{II} + \varepsilon_{3III} \cdot \eta_{III}, \end{cases}$$

und setzen zur Abkürzung

$$S\mu z_I^2 = A_I, \quad S\mu z_{II}^2 = A_{II}, \quad S\mu z_{III}^2 = A_{III},$$
$$S\mu z_1^2 = A_1, \quad S\mu z_2^2 = A_2, \quad S\mu z_3^2 = A_3.$$

Die Richtung C_1 im Körper wird eine **Hauptachse** genannt, wenn die Bedingungen

$$\text{(b)} \qquad D_2 = S\mu z_3 z_1 = 0, \quad D_3 = S\mu z_1 z_2 = 0$$

erfüllt sind.

Aus der Beziehung

$$z_1 z_I = z_1(\varepsilon_{1I} \cdot z_1 + \varepsilon_{2I} \cdot z_2 + \varepsilon_{3I} \cdot z_3)$$
$$= z_I(\varepsilon_{1I} \cdot z_I + \varepsilon_{1II} \cdot z_{II} + \varepsilon_{1III} \cdot z_{III})$$

folgt

$$\varepsilon_{1I} \cdot A_1 = \varepsilon_{1I} \cdot A_I + \varepsilon_{1II} \cdot D_{III} + \varepsilon_{1III} \cdot D_{II}.$$

In derselben Weise gewinnt man aus den Entwicklungen von $z_1 z_{II}$ und $z_1 z_{III}$ die analogen Gleichungen:

$$\varepsilon_{1II} \cdot A_1 = \varepsilon_{1I} \cdot D_{III} + \varepsilon_{1II} \cdot A_{II} + \varepsilon_{1III} \cdot D_I,$$
$$\varepsilon_{1III} \cdot A_1 = \varepsilon_{1I} \cdot D_{II} + \varepsilon_{1II} \cdot D_I + \varepsilon_{1III} \cdot A_{III}.$$

A_1 ist demnach bestimmt durch die Gleichungen

$$\text{(c)}\quad \begin{cases} \varepsilon_{1I}(A_I - A_1) + \varepsilon_{1II}\cdot D_{III} + \varepsilon_{1III}\cdot D_{II} = 0\,, \\ \varepsilon_{1I}\cdot D_{III} + \varepsilon_{1II}(A_{II} - A_1) + \varepsilon_{1III}\cdot D_I = 0\,, \\ \varepsilon_{1I}\cdot D_{II} + \varepsilon_{1II}\cdot D_I + \varepsilon_{1III}(A_{III} - A_1) = 0\,. \end{cases}$$

Folglich muß A_1 eine Wurzel der kubischen Gleichung (in Determinantenform):

$$\text{(d)}\quad \begin{vmatrix} A_I - A\,, & D_{III}\,, & D_{II} \\ D_{III}\,, & A_{II} - A\,, & D_I \\ D_{II}\,, & D_I\,, & A_{III} - A \end{vmatrix} = 0$$

sein. Sie besitzt, wie in der analytischen Geometrie des Raumes bei Gelegenheit der Hauptachsenbestimmung des Ellipsoides gezeigt wird, drei reelle Wurzeln.

Die Bedingungen, daß auch die Richtungen C_2 und C_3 Hauptachsen enthalten, d. h. daß $C_{1,2,3}$ ein Hauptachsenkreuz wird, führen ebenfalls auf die Gleichung (d). Die Größen A_1, A_2, A_3 sind demnach die Wurzeln dieser Gleichung. Sind sie als Funktionen von $A_I, A_{II}, A_{III}, D_I, D_{II}, D_{III}$ gefunden, so liefern die Gleichungen (c) und die ihnen entsprechenden für die beiden andern Achsenrichtungen die neun Koeffizienten $\varepsilon_{\alpha b}$. Die expliziten Ausdrücke*) sind

$$\varepsilon_{1I} = \frac{M_1^2}{D_{II}D_{III} - (A_I - A_1)D_I}\,,\quad \varepsilon_{1II} = \frac{M_1^2}{D_{III}D_I - (A_{II} - A_1)D_{II}}\,,$$

$$\varepsilon_{1III} = \frac{M_1^2}{D_I D_{II} - (A_{III} - A_1)D_{III}}\,,$$

$$\varepsilon_{2I} = \frac{M_2^2}{D_{II}D_{III} - (A_I - A_2)D_I}\,,\quad \varepsilon_{2II} = \frac{M_2^2}{D_{III}D_I - (A_{II} - A_2)D_{II}}\,,$$

$$\varepsilon_{2III} = \frac{M_2^2}{D_I D_{II} - (A_{III} - A_2)D_{III}}\,,$$

$$\varepsilon_{3I} = \frac{M_3^2}{D_{II}D_{III} - (A_I - A_3)D_I}\,,\quad \varepsilon_{3II} = \frac{M_3^2}{D_{III}D_I - (A_{II} - A_1)D_{II}}\,,$$

$$\varepsilon_{3III} = \frac{M_3^2}{D_I D_{II} - (A_{III} - A_3)D_{III}}\,.$$

*) In dieser Form bei Broch, Lehrbuch der Mechanik. Berlin und Christiania 1854, S. 172.

Hierin ist zur Abkürzung gesetzt

$$\frac{1}{M_1^4} = \frac{1}{[D_{II}D_{III} - (A_I - A_1)D_I]^2} + \frac{1}{[D_{III}D_I - (A_{II} - A_1)D_{II}]^2} + \frac{1}{[D_I D_{II} - (A_{III} - A_1)D_{III}]^2},$$

$$\frac{1}{M_2^4} = \frac{1}{[D_{II}D_{III} - (A_I - A_2)D_I]^2} + \frac{1}{[D_{III}D_I - (A_{II} - A_2)D_{II}]^2} + \frac{1}{[D_I D_{II} - (A_{III} - A_2)D_{III}]^2},$$

$$\frac{1}{M_3^4} = \frac{1}{[D_{II}D_{III} - (A_I - A_3)D_I]^2} + \frac{1}{[D_{III}D_I - (A_{II} - A_3)D_{II}]^2} + \frac{1}{[D_I D_{II} - (A_{III} - A_3)D_{III}]^2}.$$

Das Trägheitsmoment um die Achse $\overline{\eta}$ wird jetzt

(e) $$T_\eta = \eta_1^2 \cdot T_1 + \eta_2^2 \cdot T_2 + \eta_3^2 \cdot T_3,$$

wo die Beziehungen

$$T_1 = A_2 + A_3, \quad T_2 = A_3 + A_1, \quad T_3 = A_1 + A_2$$

zu beachten sind. Setzt man noch in (e)

$$m^2 \cdot \frac{\eta_1}{\sqrt{T_\eta}} = y_1, \quad m^2 \cdot \frac{\eta_2}{\sqrt{T_\eta}} = y_2, \quad m^2 \cdot \frac{\eta_3}{\sqrt{T_\eta}} = y_3$$

und

$$\frac{m^2}{\sqrt{T_1}} = a_1, \quad \frac{m^2}{\sqrt{T_2}} = a_2, \quad \frac{m^2}{\sqrt{T_3}} = a_3,$$

so kann man bei beliebiger Wahl der Länge m die Größen y_1, y_2, y_3 als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes auf der Oberfläche des Ellipsoides

(f) $$\frac{y_1^2}{a_1^2} + \frac{y_2^2}{a_2^2} + \frac{y_3^2}{a_3^2} = 1$$

betrachten. Diese Fläche wird als Trägheitsellipsoid*) des Körpers bezeichnet. Seine Achsen a_1, a_2, a_3 liegen in den Hauptträgheitsachsen.

*) Man nennt es auch zur Unterscheidung von verwandten konfokalen Flächen zweiter Ordnung das Poinsotsche Trägheitsellipsoid.

Wegen der Berechnung der Trägheitsmomente von Körpern mit gesetzmäßiger Begrenzung und ebensolcher Massenverteilung müssen wir auf die Lehrbücher der Integralrechnung und die betreffenden Aufgabensammlungen verweisen, während die experimentelle Ermittelung im zweiten Bande (Dynamik) behandelt wird.

175. Kinetische Energie des starren Körpers. Die Einführung des Ausdruckes für die Elementargeschwindigkeit

$$\bar{v} = \bar{t} + \overline{\omega(x-c)} \quad \text{in} \quad \mathbf{E} = \tfrac{1}{2} S \mu v^2$$

gibt für die kinetische Energie des Körpers zunächst

$$\mathbf{E} = \tfrac{1}{2} S \mu [\bar{t} + \overline{\omega(x-c)}]^2 = \tfrac{1}{2} S \mu t^2 + \tfrac{1}{2} S \mu \overline{\omega \mathfrak{z}}^2 + S \mu (\bar{t}\, \overline{\omega \mathfrak{z}}),$$

wenn, wie bisher, $\overline{x-c} = \bar{\mathfrak{z}}$ geschrieben wird.

Der erste Teil

$$\text{(a)} \qquad \mathbf{E}_t = \tfrac{1}{2} \mu^* \cdot t^2$$

ist die Energie der Translation, während der zweite

$$\mathbf{E}_r = \tfrac{1}{2} S \mu \cdot \overline{\omega \mathfrak{z}}^2 = \tfrac{1}{2} S \mu \bar{\omega}\, \overline{\mathfrak{z}(\omega \mathfrak{z})} = \tfrac{1}{2} \bar{\omega}\, S \mu \overline{\mathfrak{z}(\omega \mathfrak{z})}$$

die Energie der Rotation darstellt.

Der hier auftretende Systemvektor

$$\text{(b)} \qquad \bar{\mathbf{J}} = S \mu \cdot \overline{\mathfrak{z}(\omega \mathfrak{z})}$$

läßt sich in einfacher Weise durch die Trägheitsmomente und Deviationsmomente des Körpers ausdrücken. Denn es ist

$$\overline{\mathfrak{z}(\omega \mathfrak{z})} = \mathfrak{z}^2 \cdot \bar{\omega} - (\bar{\omega} \bar{\mathfrak{z}}) \bar{\mathfrak{z}},$$

folglich, wenn wir nach dem im Körper festen Achsenkreuz $C_{I, II, III}$ zerlegen

$$\text{(b')} \qquad \begin{cases} J_I = T_I \cdot \omega_I - D_{III} \cdot \omega_{II} - D_{II} \cdot \omega_{III}, \\ J_{II} = -D_{III} \cdot \omega_I + T_{II} \cdot \omega_{II} - D_I \cdot \omega_{III}, \\ J_{III} = -D_{II} \cdot \omega_I - D_I \cdot \omega_{II} + T_{III} \cdot \omega_{III}. \end{cases}$$

Nun ist aber

$$\omega_I = \omega \cdot \eta_I, \quad \omega_{II} = \omega \cdot \eta_{II}, \quad \omega_{III} = \omega \cdot \eta_{III},$$

so daß man

$$\mathbf{E}_r = \tfrac{1}{2} [\eta_I^2 \cdot T_I + \eta_{II}^2 \cdot T_{II} + \eta_{III}^2 \cdot T_{III} - 2 \eta_{II} \eta_{III} \cdot D_I - 2 \eta_{III} \eta_I \cdot D_{II} - 2 \eta_I \eta_{II} D_{III}]\, \omega^2$$

erhält oder

$$\text{(c)} \qquad \mathbf{E}_r = \tfrac{1}{2} T_\eta \cdot \omega^2.$$

Für die späteren Anwendungen ist aber der Ausdruck

$$(c') \quad \begin{cases} \mathbf{E}_r = \frac{1}{2}[T_I \cdot \omega_I^2 + T_{II} \cdot \omega_{II}^2 + T_{III} \cdot \omega_{III}^2 \\ \quad - 2\, D_I \omega_{II} \omega_{III} - 2\, D_{II} \cdot \omega_{III} \omega_I - 2\, D_{III} \cdot \omega_I \omega_{II}] \end{cases}$$

meistens vorzuziehen, wenn man nicht die ursprüngliche Form

$$(c'') \qquad \mathbf{E}_r = \tfrac{1}{2}\, \overline{\omega\, \mathbf{J}}$$

unmittelbar benutzen will.

Das dritte Glied in $\mathbf{E}$, nämlich

$$\mathbf{E}_m = S\mu\, \bar{t} \cdot \overline{\omega z} = \bar{\omega} \cdot S\mu \cdot \overline{z t}$$

läßt sich durch Einführung des Schwerpunktes $\bar{z}^*$ noch weiter vereinfachen. Aus

$$S\mu \cdot \bar{z} = \mu^* \cdot \bar{z}^*$$

folgt nämlich

$$S\mu\, \overline{z t} = \mu^* \cdot \overline{z^* t},$$

so daß man den definitiven Ausdruck

$$(d) \qquad \mathbf{E}_m = \mu^*(\bar{\omega} \cdot \overline{z^* t})$$

erhält. Die ganze kinetische Energie des starren Körpers können wir also darstellen in der Form

$$(A) \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_t + \mathbf{E}_r + \mathbf{E}_m = \tfrac{1}{2}\mu^* \cdot t^2 + \tfrac{1}{2} T_\eta \cdot \omega^2 + \mu^*(\bar{\omega} \cdot \overline{z^* t}).$$

$\mathbf{E}_m$ verschwindet unter anderem, wenn der Rotationspunkt C mit dem Schwerpunkte S^* zusammenfällt.

176. Die Eulerschen Impulsvektoren. Die Bildung der skalaren Systemgrößen ist eine äußerst einfache Operation, insofern man nur eine Summation, welche sich über alle Massenpunkte des Körpers erstreckt, auszuführen hat. Ganz anders steht es mit den abgeleiteten Systemvektoren (man vergleiche Nr. 168), die man wohl in unbeschränkter Anzahl nach irgendwelchen formalen Gesichtspunkten definieren könnte, deren Berechtigung jedoch dann erst durch den Nachweis ihrer Notwendigkeit gezeigt werden müßte. Diese Schwierigkeit ist uns bereits bei der Betrachtung der einfachen diskreten Punktsysteme (II. Abschnitt) in Nr. 74 und 75 begegnet und wir konnten dort die Systembeschleunigung $\mathbf{Q}$ für ein zwangläufiges System (mit einer Positionskoordinate ϑ) durch eine Gleichung von der Form

$$\Sigma\mu\, \bar{w}\, \delta\bar{x} = \mathbf{Q} \cdot \delta\vartheta$$

definieren. Für Systeme von zwei Freiheitsgraden (mit den Positionskoordinaten ϑ_1, ϑ_2) setzten wir dann in Nr. 79 ganz analog

$$\Sigma \mu \bar{w} \delta \bar{x} = \mathfrak{Q}_1 \cdot \delta\vartheta_1 + \mathfrak{Q}_2 \cdot \delta\vartheta_2$$

und betrachteten die Größen $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ als die Komponenten der Systembeschleunigung, welche übrigens kein Vektor in unserem Sinne ist.

In analoger Weise wollen wir jetzt die Ausdrücke

$$S \mu \bar{v} \delta \bar{x} \quad \text{und} \quad S \mu \bar{w} \delta \bar{x}$$

als die Quelle der Systemvektoren für den Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand des starren Körpers ansehen. Der erstere Ausgangspunkt liefert ohne weiteres

$$S \mu \bar{v} \delta \bar{x} = S \mu \bar{v} [\delta \bar{c} + \overline{\delta\vartheta (x - c)}]$$

oder

$$S \mu \bar{v} \delta \bar{x} = \delta \bar{c} \cdot S \mu \bar{v} + \delta \bar{\vartheta} \cdot S \mu \overline{(x - c) v} .$$

Die auf diese Weise eingeführten Größen

$$\text{(A)} \qquad \bar{\mathfrak{p}} = S \mu \bar{v}, \quad \bar{\mathfrak{V}} = S \mu \overline{(x - c) v},$$

welche nichts weiter sind als die geometrische Summe der elementaren Massengeschwindigkeiten des Körpers*) und diejenige ihrer Momente in bezug auf den Rotationspunkt C bezeichnen wir als die Eulerschen Impulsvektoren des starren Systems. Der Inhalt der Gleichung

$$S \mu \bar{v} \delta \bar{x} = \bar{\mathfrak{p}} \cdot \delta \bar{c} + \bar{\mathfrak{V}} \cdot \delta \bar{\vartheta}$$

läßt sich jetzt in dem Satze aussprechen:

Die gesamte virtuelle Arbeit der elementaren Massengeschwindigkeiten des starren Systems ist gleich der Summe der virtuellen Arbeiten der beiden Eulerschen Impulsvektoren.

Man erkennt auch, daß die Arbeit $\bar{\mathfrak{p}} \cdot \delta \bar{c}$ infolge der virtuellen Translation $\delta \bar{c}$ und daß die Arbeit $\bar{\mathfrak{V}} \cdot \delta \bar{\vartheta}$ bei der virtuellen Drehung entsprechend der Amplitude $\delta\vartheta$ um die Achse $\bar{\eta}$ geleistet wird.

Hiernach nennen wir insbesondere $\bar{\mathfrak{p}}$ den Impulsvektor der Translation und $\bar{\mathfrak{v}}$ denjenigen der Rotation. Die

*) $\bar{\mathfrak{p}}$ ist demnach die absolute Geschwindigkeit des Schwerpunktes mal der ganzen Masse.

Definitionsgleichung der beiden Impulsvektoren, nämlich

$$S\mu\bar{v}\,\delta\bar{x} = \bar{\mathfrak{p}}\,\delta\bar{c} + \bar{\mathbf{V}}\,\delta\bar{\vartheta}\,,$$

geht für $\delta\bar{x} = dx$, $\delta\bar{c} = d\bar{c}$ und $\delta\vartheta = d\vartheta$ und Division mit $d\tau$ in den Energieausdruck

$$\text{(I)} \qquad 2\,\mathbf{E} = \bar{\mathfrak{p}}\cdot t + \bar{\mathbf{V}}\cdot\bar{\omega}$$

über.

Die Einführung von $\bar{v} = t + \overline{\omega z}$ in die Ausdrücke (A) gibt

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \bar{\mathfrak{p}} = \mu^*\cdot\bar{t} + \mu^*\cdot\overline{\omega z^*} \quad \text{und} \\ \bar{\mathbf{V}} = \mu^*\cdot\overline{z^* t} + \bar{\mathbf{J}}\,, \end{cases}$$

wo $\bar{\mathbf{J}}$ der bereits in Nr. 175 eingeführte Systemvektor ist. Wenn der Rotationspunkt C in den Schwerpunkte des Körpers fällt, also $z^* = 0$ wird, so vereinfachen sich die beiden Eulerschen Impulsvektoren und man hat

$$\text{(B')} \qquad \bar{\mathfrak{p}} = \mu^*\cdot\bar{t}\,, \quad \bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{J}}\,.$$

Da dieser besondere Fall von überwiegender Wichtigkeit ist, so wollen wir — im Anschluß an die übliche Bezeichnung — auch $\bar{\mathbf{J}}$ den Impulsvektor der Rotation nennen. Eine Verwechslung mit $\bar{\mathbf{V}}$ ist ohnehin hier, wegen der konsequenten Buchstabenbezeichnung, ausgeschlossen.

Die Zerlegung der Eulerschen Impulsvektoren $\bar{\mathfrak{p}}$ und $\bar{\mathbf{V}}$ kann in dreifacher Weise geschehen, entweder nach dem ruhenden Achsenkreuze $C_{1,2,3}$ bzw. $O_{1,2,3}$, oder nach dem mit dem Körper fest verbundenen Achsenkreuze $C_{I,II,III}$ oder endlich in bezug auf ein Koordinatenkreuz, welches eine definite Bewegung in dem starren Körper hat. Wir haben die letztgenannte Zerlegung bisher nicht ausdrücklich hervorgehoben, weil sie nur bei Kontaktbewegungen*) von wesentlichem Nutzen ist.

177. Differentiation nach einem Vektor).** Die unabhängigen Veränderlichen, nach welchen wir bisher bei der Verwendung der Vektorrechnung differentiiert haben, waren

---

*) Man vergleiche L. Appell, Les nouvements de roulement. Paris 1899.

**) Diese symbolische Operation ist hier von untergeordneter Bedeutung und dient im folgenden nur zu einer abgekürzten Schreibung der Eulerschen Gleichungen. Man findet die allgemeine Auffassung (Gradient) bei Gibbs, Vektor-Analysis.

stets skalare Größe wie die Zeit oder eine Bogenlänge. Betrachten wir aber den skalaren Ausdruck

$$E = \tfrac{1}{2}\bar{v}\cdot\bar{v}\,,$$

so hindert uns nichts, auch hier zunächst $\bar{v}$ durch $\bar{v}+\Delta\bar{v}$ zu ersetzen und dann einen Grenzübergang zu machen. Es wird

$$E + \Delta E = \tfrac{1}{2}\cdot\overline{v+\Delta v}\;\overline{v+\Delta v}\,,$$

also

$$\Delta E = \bar{v}\cdot\Delta\bar{v} + \tfrac{1}{2}\overline{\Delta v}^2,$$

folglich, wenn wir das Arbeitsprodukt wie ein algebraisches Produkt behandeln:

$$\frac{\Delta E}{\Delta\bar{v}} = \bar{v} + \tfrac{1}{2}\overline{\Delta v}\,.$$

Der Übergang zur Grenze liefert die Gleichung

$$\bar{v} = \frac{\partial E}{\partial\bar{v}}\,.$$

Ganz analog wollen wir jetzt mit dem Ausdrucke (Nr. 175):

$$\text{(a)}\qquad \mathbf{E} = \tfrac{1}{2}\mu^*\cdot\bar{t}\bar{t} + \mu^*\cdot(\overline{\omega}\cdot\overline{z^*t}) + \tfrac{1}{2}\overline{\omega}\cdot S\mu\cdot\overline{z(\omega z)}$$

verfahren. Variabel sind $\overline{\omega}$, $\bar{t}$, d. h. der Geschwindigkeitszustand, nicht der Ort. Man erhält also bei Vernachlässigung der kleinen Größen zweiter Ordnung:

$$d\mathbf{E} = \mu^*\cdot(\bar{t}\,d\bar{t}) + \mu^*\cdot(\overline{\omega}\cdot\overline{z^*dt}) + \mu^*\cdot(d\overline{\omega}\cdot\overline{z^*t}) + \tfrac{1}{2}d\overline{\omega}\cdot\mathbf{J}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\overline{\omega}\cdot S\mu\,\overline{z(d\omega\cdot z)}\,.$$

Nun ist aber

$$\overline{\omega}\,\overline{z(d\omega\cdot z)} = z^2(\overline{\omega}\,d\overline{\omega}) - (\bar{z}\,d\overline{\omega})(\bar{z}\,\overline{\omega})\,,$$

also

$$\overline{\omega}\cdot S\mu\,\overline{z(d\omega\cdot z)} = d\overline{\omega}\cdot S\mu\,[z^2\cdot\overline{\omega} - (\bar{z}\,\overline{\omega})\cdot\bar{z}] = d\overline{\omega}\cdot\bar{\mathbf{J}}\,.$$

Demnach wird

$$d\mathbf{E} = [\mu^*\bar{t} + \mu^*\cdot\overline{\omega\,z^*}]\cdot d\bar{t} + [\mu^*\cdot\overline{z^*t} + \bar{\mathbf{J}}]\,d\overline{\omega}\,.$$

Schreibt man nach Analogie der gewöhnlichen Differentialrechnung

$$d\mathbf{E} = \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\bar{t}}\cdot d\bar{t} + \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\overline{\omega}}\cdot d\overline{\omega}\,,$$

so wird
$$\mu^*(\bar{t} + \overline{\omega\, \mathfrak{s}^*}) = \frac{\partial \mathsf{E}}{\partial \bar{t}}, \quad \mu^* \cdot \overline{\mathfrak{s}^* t} + \bar{\mathsf{J}} = \frac{\partial \mathsf{E}}{\partial \bar{\omega}}$$

und man erkennt, daß sich die Eulerschen Impulsvektoren symbolisch durch E in der einfachen und übersichtlichen Form

(b) $$\bar{\mathfrak{p}} = \frac{\partial \mathsf{E}}{\partial \bar{t}}, \quad \bar{\mathsf{V}} = \frac{\partial \mathsf{E}}{\partial \bar{\omega}}$$

darstellen lassen. Ersetzt man in E alle Vektoren durch ihre Komponenten (z. B. nach den Richtungen des im Körper festen Achsenkreuzes), bildet dann in gewöhnlicher Weise die skalaren Differentialquotienten $\frac{\partial \mathsf{E}}{\partial \omega_I}, \frac{\partial \mathsf{E}}{\partial \omega_{II}}$ usw., so stimmen dieselben tatsächlich mit $\mathfrak{p}_I, \mathfrak{p}_{II}$ usw. überein. Diese sechs skalaren Beziehungen werden also durch die beiden symbolischen Gleichungen (b) ersetzt.

178. Impulsvektoren für die Planbewegung. Die Geschwindigkeit hat jetzt bei der Bewegung des Körpers parallel zu einer festen Ebene die Komponenten ($\omega_I = 0$, $\omega_{II} = 0$, $\omega_{III} = \omega$, $t_{III} = 0$):

$$v_I = t_I - \omega \cdot \mathfrak{s}_{II}, \quad v_{II} = t_{II} + \omega\, \mathfrak{s}_I,$$

so daß die kinetische Energie die einfache Form

$$\mathsf{E} = \tfrac{1}{2}\mu^*(t_I^2 + t_{II}^2) + \tfrac{1}{2} T \cdot \omega^2 + \mu^*(t_{II}\mathfrak{s}_I^* - t_I \mathfrak{s}_{II}^*)\,\omega$$

annimmt. Hieraus erhält man durch Anwendung der Gleichungen (b) in Nr. 178:

$$\mathfrak{p}_I = \mu^*(t_I - \omega \cdot \mathfrak{s}_{II}^*), \quad \mathfrak{p}_{II} = \mu^*(t_{II} + \omega\, \mathfrak{s}_I^*),$$

$$\mathsf{V} = T \cdot \omega + \mu^*(t_{II}\mathfrak{s}_I^* - t_I \mathfrak{s}_{II}^*) = \frac{\partial \mathsf{E}}{\partial \omega}.$$

Anmerkung. Auf den ersten Blick erscheint es auffallend, daß die räumlichen Komponentenformeln für $\bar{\mathfrak{p}}$ und $\bar{\mathsf{V}}$, die in Nr. 180 zusammengestellt sind, bei direkter Anwendung außer $\mathsf{V}_{III} = \mathsf{V}$ noch zwei weitere Komponenten

$$\mathsf{V}_I = -\mu^* \mathfrak{s}_{III}^* t_{II} - D_{II} \cdot \omega$$
$$\mathsf{V}_{II} = \mu^* \mathfrak{s}_{III}^* t_I - D_I \cdot \omega$$

geben, die jedenfalls von Null verschieden sind, solange nicht $\mathfrak{s}_{III}^* = 0$, $D_I = D_{II} = 0$ wird. Welches ist die kine-

matische Bedeutung dieser Komponenten für die Planbewegung?

179. Die Eulerschen Beschleunigungsvektoren des starren Systems. Wir setzen

$$S\mu\bar{w}\,\delta\bar{x} = \bar{\mathfrak{q}}\cdot\delta\bar{c} + \delta\bar{\vartheta}\cdot\overline{\mathbf{W}}\,.$$

Da auch

$$S\mu\bar{w}\,\delta\bar{x} = S\mu\bar{w}\,[\delta\bar{c} + \overline{\delta\vartheta(x-c)}]$$

ist, so wird

$$\bar{\mathfrak{q}} = S\mu\bar{w}\,,\quad \overline{\mathbf{W}} = S\mu\,\overline{\overline{(x-c)}\,w}\,.$$

In dieser Form sind die Eulerschen Beschleunigungsvektoren $\bar{\mathfrak{q}}$ und $\overline{\mathbf{W}}$ den entsprechenden Geschwindigkeitsvektoren $\bar{\mathfrak{p}}, \overline{\mathbf{V}}$ ganz analog definiert. Es handelt sich also jetzt nur darum zu zeigen, in welchem Zusammenhange sie mit den letzteren stehen. Ohne weiteres sieht man, daß $\bar{\mathfrak{q}} = \frac{d\bar{\mathfrak{p}}}{d\tau}$ ist. Nicht ganz so einfach ist die Beziehung zwischen $\overline{\mathbf{W}}$ und $\overline{\mathbf{V}}$. Man hat

$$\frac{d\overline{\mathbf{V}}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}[S\mu\,\overline{\overline{(x-c)}\,v}] = S\mu\,\overline{\overline{(x-c)}\,w} + S\mu\,\overline{\overline{(v-t)}\,v}$$

oder

$$\overline{\mathbf{W}} = \frac{d\overline{\mathbf{V}}}{d\tau} + \overline{t\mathfrak{p}}\,.$$

Durch die beiden fundamentalen Beziehungen

$$\text{(I)}\qquad \bar{\mathfrak{q}} = \frac{d\bar{\mathfrak{p}}}{d\tau}\,,\quad \overline{\mathbf{W}} = \frac{d\overline{\mathbf{V}}}{d\tau} + \overline{t\mathfrak{p}}$$

ist der Zusammenhang der Beschleunigungsvektoren des Systems mit den Impulsvektoren desselben hergestellt. Es ist als $\bar{\mathfrak{q}}$ gleich der Beschleunigung des Schwerpunktes multipliziert mit der Masse des Körpers, und für die Wahl des Schwerpunktes als Rotationspunkt wird nach (B') in Nr. 176 $\overline{\mathbf{V}} = \overline{\mathbf{J}}$ und nach (B) derselben Nummer $\overline{\mathfrak{p}t} = 0$, also

$$\text{(Ia)}\qquad \overline{\mathbf{W}} = \frac{d\overline{\mathbf{J}}}{d\tau}\,.$$

Solange es sich lediglich um Zerlegungen nach den Achsen $O_{1,2,3}$ des ruhenden Raumes handelt, ist unsere Darstellung der Systemvektoren des starren Körpers ausreichend.

Dieses Bezugssystem hat aber den großen Nachteil, daß die Trägheits- und Deviationsmomente $T_1, T_2, T_3, D_1, D_2, D_3$, sowie die absoluten Schwerpunktskoordinaten z_1^*, z_2^*, z_3^* als mit der Zeit veränderliche Größen in den Grundgleichungen der Kinematik eintreten. Um dieser Schwierigkeit aus dem Wege zu gehen, wendet man auf die Vektoren $\bar{\mathfrak{p}}$ und $\bar{\mathbf{V}}$ die Prinzipien der relativen Bewegung an und ermöglicht so eine einfache Zerlegung nach den Achsen $C_{I, II, III}$. Mit Beibehaltung der früher (Nr. 134) angewendeten Bezeichnung ist

$$\frac{d\bar{\mathfrak{p}}}{d\tau} = \overline{\omega\,\mathfrak{p}} + \frac{\mathfrak{d}\bar{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{d}\tau}, \quad \frac{d\bar{\mathbf{V}}}{d\tau} = \overline{\omega\,\mathbf{V}} + \frac{\mathfrak{d}\bar{\mathbf{V}}}{\mathfrak{d}\tau}$$

und die Gleichungen (I) werden jetzt ersetzt durch die folgenden

$$\text{(II)} \qquad \bar{\mathfrak{q}} = \overline{\omega\,\mathfrak{p}} + \frac{\mathfrak{d}\bar{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{d}\tau}, \quad \bar{\mathbf{W}} = \overline{\omega\,\mathbf{V}} + \frac{\mathfrak{d}\bar{\mathbf{V}}}{\mathfrak{d}\tau} + \overline{t\,\mathfrak{p}}.$$

Man kann auch die Abhängigkeit dieser Vektoren von der kinetischen Energie des Körpers zum Ausdruck bringen, indem man die Gleichungen (b) in Nr. 177 berücksichtigt. Dies gibt

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} \bar{\mathfrak{q}} = \overline{\omega\,\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{t}}} + \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}\tau}\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{t}}\right), \\ \bar{\mathbf{W}} = \overline{\omega\,\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\omega}}} + \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}\tau}\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\omega}}\right) + \overline{t\,\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{t}}}. \end{cases}$$

Die Aufstellung der Gleichungen (II) für $z^* = 0$ und das Hauptachsensystem $C_{I, II, III}$ durch Euler*) ist eine der bedeutendsten kinematischen Leistungen des 18. Jahrhunderts.

Operiert man nicht schon von vornherein mit Komponentengleichungen, so ist die direkte Einsetzung von $\bar{\mathfrak{p}}$ und $\bar{\mathbf{V}}$ in die Gleichungen (II) notwendig. Dies gibt

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} \bar{\mathfrak{q}} = \mu^*\left[\overline{\omega\,t} + \frac{\mathfrak{d}\bar{t}}{\mathfrak{d}\tau} + \overline{\omega(\omega\,z^*)} + \overline{\frac{d\omega}{d\tau}\cdot z^*}\right] \quad \text{und} \\ \bar{\mathbf{W}} = \overline{\omega\,\mathbf{J}} + \frac{\mathfrak{d}\bar{\mathbf{J}}}{\mathfrak{d}\tau} + \mu^*\left[\overline{z^*(\omega\,t)} + \overline{z^*\,\frac{\mathfrak{d}t}{\mathfrak{d}\tau}}\right]. \end{cases}$$

*) Der Studierende konsultiert am bequemsten seine Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum. Rostock und Greifswald 1765, S. 337—345. Die allgemeinen Ausdrücke für $\bar{\mathfrak{q}}$ und $\bar{\mathbf{W}}$ wurden erst von Lagrange aufgestellt. Man vergleiche Nr. 180. Die Entdeckung der Hauptachsen verdanken wir v. Segner (1704—1777).

Für $\mathfrak{s}^* = 0$ folgen hieraus die übersichtlichen Gleichungen:

(V) $$\bar{\mathfrak{q}} = \mu^*\left(\overline{\omega\,\mathfrak{t}} + \frac{\mathfrak{d}\bar{\mathfrak{t}}}{\mathfrak{d}\tau}\right), \quad \overline{\mathbf{W}} = \overline{\omega\,\mathbf{J}} + \frac{\mathfrak{d}\bar{\mathbf{J}}}{\mathfrak{d}\tau},$$

wo

$$\bar{\mathbf{J}} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\omega}}$$

zu nehmen ist. Für $\mathfrak{s}^* = 0$ und $\bar{\mathfrak{t}} = 0$ hat man nur den Rotationsvektor

(VI) $$\overline{\mathbf{W}} = \overline{\omega \frac{\partial \mathbf{E}_r}{\partial \bar{\omega}}} + \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}\tau}\left(\frac{\partial \mathbf{E}_r}{\partial \bar{\omega}}\right).$$

In den Gleichungen (V) erscheint der Einfluß der Translations- und der Rotationsbewegung auf die Eulerschen Vektoren $\bar{\mathfrak{q}}$ und $\overline{\mathbf{W}}$ vollständig getrennt, so daß man für die Drehbewegung allein den Schwerpunkt als ruhend ansehen kann.

180. Zusammenstellung der Komponentenformeln. Als Ausgangspunkt gilt der Ausdruck für die kinetische Energie:

$$\begin{aligned}2\,\mathbf{E} = {} & \mu^*(t_I^2 + t_{II}^2 + t_{III}^2) + T_I \cdot \omega_I^2 + T_{II} \cdot \omega_{II}^2 + T_{III} \cdot \omega_{III}^2 \\ & + 2\mu^*[\omega_I(\mathfrak{s}_{II}^* t_{III} - \mathfrak{s}_{III}^* t_{II}) + \omega_{II}(\mathfrak{s}_{III}^* t_I - \mathfrak{s}_I^* t_{III}) + \omega_{III}(\mathfrak{s}_I^* t_{II} - \mathfrak{s}_{II}^* t_I)] \\ & - 2(D_I\,\omega_{II}\,\omega_{III} + D_{II}\,\omega_{III}\,\omega_I + D_{III}\,\omega_I\,\omega_{II}).\end{aligned}$$

Die Komponenten*) der Impulsvektoren sind:

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}_I &= \mu^*(t_I + \omega_{II}\,\mathfrak{s}_{III}^* - \omega_{III}\,\mathfrak{s}_{II}^*), \\ \mathfrak{p}_{II} &= \mu^*(t_{II} + \omega_{III}\,\mathfrak{s}_I^* - \omega_I\,\mathfrak{s}_{III}^*), \\ \mathfrak{p}_{III} &= \mu^*(t_{III} + \omega_I\,\mathfrak{s}_{II}^* - \omega_{II}\,\mathfrak{s}_I^*).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_I &= \mu^*(\mathfrak{s}_{II}^*\,t_{III} - \mathfrak{s}_{III}^*\,t_{II}) + T_I \cdot \omega_I - D_{III} \cdot \omega_{II} - D_{II} \cdot \omega_{III}, \\ \mathbf{V}_{II} &= \mu^*(\mathfrak{s}_{III}^*\,t_I - \mathfrak{s}_I^*\,t_{III}) + T_{II} \cdot \omega_{II} - D_I \cdot \omega_{III} - D_{III} \cdot \omega_I, \\ \mathbf{V}_{III} &= \mu^*(\mathfrak{s}_I^*\,t_{II} - \mathfrak{s}_{II}^*\,t_I) + T_{III} \cdot \omega_{III} - D_{II} \cdot \omega_I - D_I \cdot \omega_{II}.\end{aligned}$$

In den nachfolgenden Komponentenformeln für $\bar{\mathfrak{q}}$ und $\overline{\mathbf{W}}$ ist das Zeichen $\mathfrak{d}$, welches nur vor der Zerlegung einen Unterscheidungswert besitzt, durch das übliche Zeichen d ersetzt.

*) Obwohl sich die aufeinander folgenden Komponenten durch zyklische Vertauschung der Indizes ergeben, sind doch hier die einzelnen Komponenten ausgeschrieben, weil dies für die Benutzung der allgemeinen Gleichungen bequem ist.

$$\mathfrak{q}_I \;= \mu^* \left[\frac{dt_I}{d\tau} + \frac{d\omega_{II}}{d\tau} \mathfrak{z}_{III}^* - \frac{d\omega_{III}}{d\tau} \mathfrak{z}_{II}^* + \omega_{II} t_{III} - \omega_{III} t_{II} \right.$$
$$\left. + \omega_{II}(\omega_I \mathfrak{z}_{II}^* - \omega_{II} \mathfrak{z}_I^*) - \omega_{III}(\omega_{III} \mathfrak{z}_I^* - \omega_I \mathfrak{z}_{III}^*) \right],$$

$$\mathfrak{q}_{II} = \mu^* \left[\frac{dt_{II}}{d\tau} + \frac{d\omega_{III}}{d\tau} \mathfrak{z}_I^* - \frac{d\omega_I}{d\tau} \mathfrak{z}_{III}^* + \omega_{III} t_I - \omega_I t_{III} \right.$$
$$\left. + \omega_{III}(\omega_{II} \mathfrak{z}_{III}^* - \omega_{III} \mathfrak{z}_{II}^*) - \omega_I(\omega_I \mathfrak{z}_{II}^* - \omega_{II} \mathfrak{z}_I^*) \right],$$

$$\mathfrak{q}_{III} = \mu^* \left[\frac{dt_{III}}{d\tau} + \frac{d\omega_I}{d\tau} \mathfrak{z}_{II}^* - \frac{d\omega_{II}}{d\tau} \mathfrak{z}_I^* + \omega_I t_{II} - \omega_{II} t_I \right.$$
$$\left. + \omega_I(\omega_{III} \mathfrak{z}_I^* - \omega_I \mathfrak{z}_{III}^*) - \omega_{II}(\omega_{II} \mathfrak{z}_{III}^* - \omega_{III} \mathfrak{z}_{II}^*) \right].$$

$$\mathfrak{W}_I = -(T_{II} - T_{III})\omega_{II}\omega_{III} - D_{III}\omega_{III}\omega_I - D_{II}\omega_I\omega_{II} - D_I(\omega_{II}^2 + \omega_{III}^2)$$
$$+ T_I \frac{d\omega_I}{d\tau} - D_{III}\frac{d\omega_{II}}{d\tau} - D_{II}\frac{d\omega_{III}}{d\tau}$$
$$+ \mu^* \left[\mathfrak{z}_2^*(\omega_I t_{II} - \omega_{II} t_I) - \mathfrak{z}_{III}^*(\omega_{II} t_{III} - \omega_{III} t_{II}) + \mathfrak{z}_{II}^* \frac{dt_{III}}{d\tau} - \mathfrak{z}_{III}^* \frac{dt_{II}}{d\tau} \right],$$

$$\mathfrak{W}_{II} = -(T_{III} - T_I)\omega_{III}\omega_I - D_I\omega_I\omega_{II} - D_{III}\omega_{II}\omega_{III} - D_{II}(\omega_{III}^2 + \omega_I^2)$$
$$+ T_{II} \frac{d\omega_{II}}{d\tau} - D_I\frac{d\omega_{III}}{d\tau} - D_{III}\frac{d\omega_I}{d\tau}$$
$$+ \mu^* \left[\mathfrak{z}_3^*(\omega_{II} t_{III} - \omega_{III} t_{II}) - \mathfrak{z}_I^*(\omega_{III} t_I - \omega_I t_{III}) + \mathfrak{z}_{III}^* \frac{dt_I}{d\tau} - \mathfrak{z}_I^* \frac{dt_{III}}{d\tau} \right],$$

$$\mathfrak{W}_{III} = -(T_I - T_{II})\omega_I\omega_{II} - D_{II}\omega_{II}\omega_{III} - D_I\omega_{III}\omega_I - D_{III}(\omega_I^2 + \omega_{III}^2)$$
$$+ T_{III} \frac{d\omega_{III}}{d\tau} - D_{II}\frac{d\omega_I}{d\tau} - D_I\frac{d\omega_{II}}{d\tau}$$
$$+ \mu^* \left[\mathfrak{z}_I^*(\omega_{III} t_I - \omega_I t_{III}) - \mathfrak{z}_{II}^*(\omega_I t_{II} - \omega_{II} t_I) + \mathfrak{z}_I^* \frac{dt_{II}}{d\tau} - \mathfrak{z}_{II}^* \frac{dt_I}{d\tau} \right].$$

Für $\mathfrak{z}^* = 0$ und Hauptachsen erhält man die Eulerschen Gleichungen in der üblichen Form

$$\mathfrak{W}_I \;= T_I \;\frac{d\omega_I}{d\tau} - (T_{II} - T_{III})\,\omega_{II}\,\omega_{III}\,,$$

$$\mathfrak{W}_{II} \;= T_{II} \;\frac{d\omega_{II}}{d\tau} - (T_{III} - T_I\;)\,\omega_{III}\,\omega_I\;,$$

$$\mathfrak{W}_{III} = T_{III}\frac{d\omega_{III}}{d\tau} - (T_I \;- T_{II})\,\omega_I\;\omega_{II}$$

mit $\quad \mathfrak{E} = \frac{1}{2}(T_I \cdot \omega_I^2 + T_{II} \cdot \omega_{II}^2 + T_{III} \cdot \omega_{III}^2)\,.$

181. Systembeschleunigung bei der Planbewegung. Wählen wir jetzt den Schwerpunkt als Rotationszentrum C und legen die Bewegungsebene durch zwei Hauptachsen des Körpers, so ist

$$z^*_{III} = 0, \quad D_I = D_{II} = D_{III} = 0, \quad \omega_I = 0, \quad \omega_{II} = 0, \quad \omega_{III} = \omega$$

und es ergibt sich aus der vorstehenden Zusammenstellung der Komponenten

$$\mathbf{q}_I = \mu^* \left(\frac{dt_I}{d\tau} - \omega t_{II}\right), \quad \mathbf{q}_{II} = \mu^* \left(\frac{dt_{II}}{d\tau} + \omega t_I\right), \quad \mathbf{W} = T \frac{d\omega}{d\tau}.$$

An diese Formeln knüpfen wir die Frage nach der speziellen Bewegungsform, welche der Annahme $\mathbf{q}_I = 0$, $\mathbf{q}_{II} = 0$, $\mathbf{W} = 0$, also dem Falle entspricht, in dem beide Vektoren der Systembeschleunigung verschwinden. Dies gibt

$$\frac{d\omega}{d\tau} = 0, \quad \frac{dt_I}{d\tau} = \omega t_{II}, \quad \frac{dt_{II}}{d\tau} = -\omega t_I.$$

Hieraus folgt zunächst $\omega = \omega_0$ (konstant) und dann

$$\frac{d^2 t_I}{d\tau^2} + \omega_0^2 t_I = 0, \quad \frac{d^2 t_{II}}{d\tau^2} + \omega_0^2 t_{II} = 0.$$

Wegen $\frac{d\vartheta}{d\tau} = \omega_0$ hat man $\vartheta = \omega_0 \tau$, wenn ϑ und τ gleichzeitig Null werden. Ferner ist

$$t_I = a_I \cos \omega_0 \tau + b_I \sin \omega_0 \tau, \quad t_{II} = b_I \cos \omega_0 \tau - a_I \sin \omega_0 \tau$$

oder

$$t_I = a_I \cos \vartheta + b_I \sin \vartheta, \quad t_{II} = b_I \cos \vartheta - a_I \sin \vartheta.$$

Nun hat man aber nach Nr. 118

$$t_I = t_1 \cos \vartheta + t_2 \sin \vartheta, \quad t_{II} = t_2 \cos \vartheta - t_1 \sin \vartheta.$$

Mithin sind t_1 und t_2 konstante Größen. Die beschleunigungsfreie Planbewegung besteht also in einer gleichförmigen Translation des Systems und in einer Drehung des Systems um seinen Schwerpunkt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit.

Dasselbe Resultat folgt unmittelbar aus den Gleichungen

$$\bar{\mathbf{p}} = \text{const.} \quad \text{und} \quad \frac{d\mathbf{V}}{d\tau} = -(t_1 p_2 - t_2 p_1).$$

182. Ein impulsfreier starrer Körper ruht. Aus Gleichung (I) in Nr. 176:

$$2\mathbf{E} = \bar{\mathbf{p}}\,\bar{t} + \bar{\omega}\,\bar{\mathbf{V}}$$

erkennt man sofort, daß das Verschwinden der Impulsvektoren $\bar{\mathfrak{p}}, \overline{\mathbf{V}}$ das Nullwerden der kinetischen Energie $\mathbf{E} = \frac{1}{2} S \mu v^2$ mit sich führt. Dies ist aber nur möglich, wenn alle Elementargeschwindigkeiten einzeln zu Null werden, d. h. wenn der Körper ruht.

183. Beschleunigungsfreie Bewegung des starren Körpers. Aus der Definitionsgleichung

$$S \mu \frac{d\bar{v}}{d\tau} \cdot \delta \bar{x} = \bar{\mathfrak{q}} \cdot \delta \bar{c} + \overline{\mathbf{W}} \cdot \delta \bar{\vartheta}$$

folgt sofort

(a) $$\frac{d\mathbf{E}}{d\tau} = \bar{\mathfrak{q}} \bar{t} + \overline{\mathbf{W}} \bar{\omega}.$$

Es verschwindet also hier $\frac{d\mathbf{E}}{d\tau}$ mit den Beschleunigungsvektoren $\bar{\mathfrak{q}}$ und $\overline{\mathbf{W}}$. Die beschleunigungsfreie Bewegung folgt selbstverständlich den Bedingungen:

(b) $$\bar{\mathfrak{p}} = \bar{\mathfrak{p}}^0 \quad \text{und} \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}^0,$$

wo der Index 0 die Unabhängigkeit der betreffenden Größe von der Zeit andeutet. Sie ist aber durch diese Gleichungen noch nicht vollständig charakterisiert.

Bei der beschleunigungsfreien Bewegung bleibt die Geschwindigkeit des Schwerpunktes nach Größe und Richtung konstant. Die Rotation erfolgt immer so, daß keine Änderung der gesamten kinetischen Energie eintritt. Da die beschleunigungsfreie Bewegung dadurch definiert ist, daß für alle möglichen virtuellen Verschiebungen des Körpers $S \mu \bar{w} \delta \bar{x} = 0$ sein muß, so kann die Wahl des Rotationspunktes C keinen Einfluß auf den Charakter der beschleunigungsfreien Bewegung haben. Wenn wir also den Schwerpunkt S als Rotationspunkt wählen, so lauten die Gleichungen unserer Bewegung nach den Gleichungen (I) und (Ia) in Nr. 179

$$\mu^* \frac{d\bar{t}}{d\tau} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\overline{\mathbf{J}}}{d\tau} = 0.$$

Da nun die Vektoren $\bar{t}$ und $\overline{\mathbf{J}}$ voneinander unabhängig sind, so kann man bei der Betrachtung der beschleunigungsfreien Rotation des starren Körpers sich den Schwerpunkt desselben als ruhend vorstellen.

Aus den vorstehenden Gleichungen folgt also das Resultat

$$\bar{\mathbf{J}} = \bar{\mathbf{J}}^0,$$

d. h. die beschleunigungsfreie Drehbewegung des starren Körpers erfolgt so, daß der Impulsvektor ($\bar{\mathbf{J}}^0$) nach Größe und Richtung im Raume festliegt.

184. Poinsots geometrische Deutung der beschleunigungsfreien Rotation. Aus den bisher entwickelten Differentialgleichungen und Integralgleichungen des Problems

$$\frac{d\mathbf{E}}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\bar{\mathbf{J}}}{d\tau} = 0,$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^0, \quad \bar{\mathbf{J}} = \bar{\mathbf{J}}^0$$

folgen eine Reihe einfacher geometrischer Beziehungen, die von Poinsot*) entwickelt sind.

Zunächst liefert die Gleichung

$$\frac{d\mathbf{E}}{d\tau} = \bar{\mathbf{p}}\frac{d\bar{t}}{d\tau} + \bar{\mathbf{V}}\frac{d\bar{\omega}}{d\tau} = 0$$

für $\bar{t} = 0$ und $\bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{J}}$ die Relation $\bar{\mathbf{J}}\frac{d\bar{\omega}}{d\tau} = 0$, so daß auch

$$\frac{d}{d\tau}(\bar{\omega}\bar{\mathbf{J}}) = 0$$

sein muß. Die entsprechende Integralgleichung ist

$$\bar{\omega}\bar{\mathbf{J}} = \bar{\omega}^0\bar{\mathbf{J}}^0$$

oder, wenn wir den Winkel zwischen Vektoren $\bar{\mathbf{J}}$ und $\bar{\omega}$ (Fig. 89) mit λ bezeichnen

(a) $$\omega\cos\lambda = \omega^0\cos\lambda^0.$$

Die Projektion der Winkelgeschwindigkeit auf die Richtung des Impulsvektors ist eine unveränderliche Größe.

$\bar{\mathbf{J}}'$ sei der Wert von $\bar{\mathbf{J}}$ zur Zeit $\tau + d\tau$, so daß

$$\bar{\mathbf{J}}' = \bar{\mathbf{J}} + \frac{\mathfrak{d}\bar{\mathbf{J}}}{\mathfrak{d}\tau}d\tau$$

gesetzt werden kann. Nun ist

$$|\overline{\mathbf{J}\mathbf{J}'}| : \mathbf{J}^2 = d\psi = \omega\sin\lambda \cdot d\tau$$

*) Théorie nouvelle de la rotation. Journ. de Liouville t. 17. 1851. Deutsch von Schellbach (Berlin 1851).

der unendlich kleine Winkel, welchen $\overline{\mathbf{J}}$ während des Zeitverlaufs $d\tau$ im rotierenden Körper beschreibt. Damit aber $\overline{\mathbf{J}}$ im Raume unveränderlich bleiben kann, muß $\overline{\mathbf{J}'}$ infolge der Drehung des Körpers in derselben Zeit $d\tau$ um den Winkel $d\psi$ zurückgeführt werden.

In der Gleichung

$$T_I \cdot \omega_I^2 + T_{II} \cdot \omega_{II}^2 + T_{III} \cdot \omega_{III}^2 = 2\,\mathbf{E}^0 = T_\eta \cdot \omega^{0^2},$$

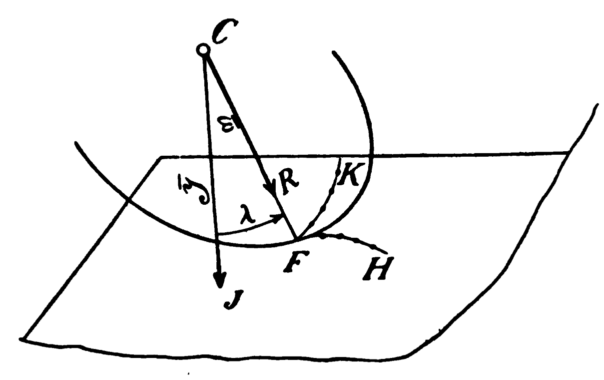


Fig. 89.

welche die Konstanz der kinetischen Energie ausdrückt, setzen wir jetzt

$$m\,\omega_I = y_I\,, \quad m\,\omega_{II} = y_{II}\,, \quad m\,\omega_{III} = y_{III}$$

$$m\sqrt{\frac{2\,\mathbf{E}^0}{T_I}} = e_I\,, \quad m\sqrt{\frac{2\,\mathbf{E}^0}{T_{II}}} = e_{II}\,, \quad m\sqrt{\frac{2\,\mathbf{E}^0}{T_{III}}} = e_{III}$$

und betrachten (wie in Nr. 174) y_I, y_{II}, y_{III} als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes der Fläche

$$\text{(b)} \qquad \left(\frac{y_I}{e_I}\right)^2 + \left(\frac{y_{II}}{e_{II}}\right)^2 + \left(\frac{y_{III}}{e_{III}}\right)^2 = 1\,,$$

welche Poinsot das Zentralellipsoid des Körpers nennt.

Der Faktor m stellt eine beliebig gewählte Längeneinheit dar, so daß $\bar{y}(=CF)$ direkt $\bar{\omega}(=CR)$ gibt. Nun ist

$$\text{(c)} \qquad \frac{y_I}{e_I^2}(z_I - y_I) + \frac{y_{II}}{e_{II}^2}(z_{II} - y_{II}) + \frac{y_{III}}{e_{III}^2}(z_{III} - y_{III}) = 0$$

die berührende Ebene der Fläche (b) im Punkte $\bar{y}$. Diese Ebene steht aber auf $\overline{\mathbf{J}}$ senkrecht, da

$$\frac{y_I}{e_I^2} = \frac{1}{m} \cdot \frac{\mathbf{J}_I}{2\,\mathbf{E}_0}, \quad \frac{y_{II}}{e_{II}^2} = \frac{1}{m} \cdot \frac{\mathbf{J}_{II}}{2\,\mathbf{E}_0}, \quad \frac{y_{III}}{e_{III}^2} = \frac{1}{m} \cdot \frac{\mathbf{J}_{III}}{2\,\mathbf{E}_0}$$

ist. Ihre Entfernung vom Drehpunkte C ist $m\,\omega \cos\lambda = m\,\omega^0 \cos\lambda^0$, also konstant. Während der beschleunigungsfreien Rotation des starren Körpers rollt sein Zentralellipsoid auf der im Raume festen Ebene (c), da der Kontaktpunkt als ein Punkt der Drehachse momentan die Geschwindigkeit Null besitzt und die Normalen beider Flächen zusammenfallen. Die Rollspur auf (b) ist die Schnittkurve des Kegels der aufeinander folgenden Momentanachsen ($\bar{\omega}$) mit dem Zentralellipsoid.

Für die kinematische Auffassung der beschleunigungsfreien Bewegung des starren Körpers ist der vorstehende kurze Abriß hinreichend. Die weitergehenden Entwicklungen sollen im II. Bande (Dynamik) gebracht werden.

185. Ableitung der Eulerschen Beschleunigungsvektoren aus der Lagrangeschen Zentralgleichung. Aus der identischen Gleichung (2) in Nr. 62

$$\bar{w}\,\delta\bar{x} = \frac{d}{d\tau}(\bar{v}\,\delta\bar{x}) - \delta E - \bar{v}\left(\frac{d\,\delta\bar{x}}{d\tau} - \frac{\delta\,d\bar{x}}{d\tau}\right)$$

können wir durch Multiplikation mit dem Massenelement μ und Summation über den ganzen Körper sofort die Zentralgleichung für ein Massensystem

$$(1)\quad S\mu\bar{w}\,\delta\bar{x} = \frac{d}{d\tau}[S\mu\,\bar{v}\,\delta\bar{x}] - \delta\mathbf{E} - S\mu\,\bar{v}\left(\frac{d\,\delta\bar{x}}{d\tau} - \frac{\delta\,d\bar{x}}{d\tau}\right)$$

ableiten. Sie bezieht sich auf den starren Körper, wenn

$$\bar{v} = \bar{t} + \overline{\omega(x-c)}, \quad \delta\bar{x} = \delta\bar{c} + \overline{\delta\vartheta(x-c)}$$

$$S\mu\bar{v}\,\delta\bar{x} = \bar{\mathbf{p}}\cdot\delta\bar{c} + \overline{\mathbf{V}}\cdot\delta\bar{\vartheta}, \quad S\mu\bar{w}\,\delta\bar{x} = \bar{\mathbf{q}}\cdot\delta\bar{c} + \overline{\mathbf{W}}\cdot\delta\bar{\vartheta}$$

gesetzt wird. Wir müssen zunächst einen Ausdruck für $d\,\delta\bar{x} - \delta\,d\bar{x}$ ableiten. Zu diesem Zwecke bilden wir aus den Gleichungen

$$\delta\bar{x} = \delta\bar{c} + \overline{\delta\vartheta(x-c)}, \quad d\bar{x} = d\bar{c} + \overline{d\vartheta(x-c)}$$

$$d\,\delta\bar{x} = d\,\delta\bar{c} + \overline{d\,\delta\vartheta(x-c)} + \overline{\delta\vartheta\,[d\vartheta(x-c)]},$$

$$\delta\,d\bar{x} = \delta\,d\bar{c} + \overline{\delta\,d\vartheta(x-c)} + \overline{d\vartheta\,[\delta\vartheta(x-c)]}$$

und beachten die Identität (cf. Aufgabe 22, S. 22):

$$\overline{\delta\bar{\vartheta}(\overline{d\bar{\vartheta}\,\bar{z}})} + \overline{d\bar{\vartheta}(\overline{\bar{z}\,\delta\bar{\vartheta}})} + \overline{\bar{z}(\overline{\delta\bar{\vartheta}\,d\bar{\vartheta}})} = 0\,,$$

dann wird

$$(2) \qquad d\,\delta\bar{x} - \delta\,d\bar{x} = d\,\delta\bar{c} - \delta\,d\bar{c} + \overline{d\bar{\lambda}(\bar{x} - \bar{c})}\,,$$

wenn man zur Abkürzung

$$(3) \qquad d\bar{\lambda} = d\,\delta\bar{\vartheta} - \delta\,d\bar{\vartheta} - \overline{d\bar{\vartheta}\cdot\delta\bar{\vartheta}}$$

setzt. Für $d\bar{\lambda} = 0$ und $d\,\delta\bar{c} - \delta\,d\bar{c} = 0$

wird auch $d\,\delta\bar{x} - \delta\,d\bar{x} = 0\,.$

Die Gleichung (1) geht also in diesem Falle in die spezielle Lagrangesche Zentralgleichung

$$(1\text{a}) \qquad \bar{\mathbf{q}}\cdot\delta\bar{c} + \overline{\mathbf{W}}\cdot\delta\bar{\vartheta} = \frac{d}{d\tau}\,[S\mu\bar{v}\,\delta\bar{x}] - \delta\mathbf{E}$$

über oder, was dasselbe ist, in

$$(1\text{b}) \qquad \bar{\mathbf{q}}\cdot\delta\bar{c} + \overline{\mathbf{W}}\cdot\delta\bar{\vartheta} = \frac{d}{d\tau}\,(\bar{\mathbf{p}}\cdot\delta\bar{c} + \overline{\mathbf{V}}\cdot\delta\bar{\vartheta}) - \delta\mathbf{E}$$

über. Da nun für den Fall, daß die Komponenten aller Vektoren auf ein im Körper festes Achsenkreuz $C_{I,\,II,\,III}$ bezogen sind, $\mathbf{E}$ von den Koordinaten explizit unabhängig und daher

$$\delta\mathbf{E} = \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\bar{t}}\,\delta\bar{t} + \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\bar{\omega}}\,\delta\bar{\omega} = \bar{\mathbf{p}}\cdot\delta\bar{t} + \overline{\mathbf{V}}\cdot\delta\bar{\omega}$$

ist, so wird

$$\bar{\mathbf{q}}\cdot\delta\bar{c} + \overline{\mathbf{W}}\cdot\delta\bar{\vartheta} = \bar{\mathbf{p}}\frac{d\,\delta\bar{c}}{d\tau} + \overline{\mathbf{V}}\frac{d\,\delta\bar{\vartheta}}{d\tau} + \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{d\tau}\,\delta\bar{c} + \frac{d\overline{\mathbf{V}}}{d\tau}\cdot\delta\bar{\vartheta} - \bar{\mathbf{p}}\frac{\delta\,d\bar{c}}{d\tau} - \overline{\mathbf{V}}\frac{\delta\,d\bar{\vartheta}}{d\tau}$$

oder, wenn wir also alle Vektoren nach dem im Körper festen Achsenkreuze $C_{I,\,II,\,III}$ zerlegen:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{q}_I\,\delta c_I + \mathbf{q}_{II}\,\delta c_{II} + \mathbf{q}_{III}\cdot\delta c_{III} + \mathbf{W}_I\,\delta\vartheta_I + \mathbf{W}_{II}\,\delta\vartheta_{II} + \mathbf{W}_{III}\,\delta\vartheta_{III} \\
&= \mathbf{p}_I\left(\frac{d\,\delta c_I}{d\tau} - \frac{\delta\,dc_I}{d\tau}\right) + \mathbf{p}_{II}\left(\frac{d\,\delta c_{II}}{d\tau} - \frac{\delta\,dc_{II}}{d\tau}\right) + \mathbf{p}_{III}\left(\frac{d\,\delta c_{III}}{d\tau} - \frac{\delta\,dc_{III}}{d\tau}\right) \\
&+ \mathbf{V}_I\left(\frac{d\,\delta\vartheta_I}{d\tau} - \frac{\delta\,d\vartheta_I}{d\tau}\right) + \mathbf{V}_{II}\left(\frac{d\,\delta\vartheta_{II}}{d\tau} - \frac{\delta\,d\vartheta_{II}}{d\tau}\right) + \mathbf{V}_{III}\left(\frac{d\,\delta\vartheta_{III}}{d\tau} - \frac{\delta\,d\vartheta_{III}}{d\tau}\right) \\
&+ \frac{d\mathbf{p}_I}{d\tau}\delta c_I + \frac{d\mathbf{p}_{II}}{d\tau}\delta c_{II} + \frac{d\mathbf{p}_{III}}{d\tau}\delta c_{III} + \frac{d\mathbf{V}_I}{d\tau}\delta\vartheta_I + \frac{d\mathbf{V}_{II}}{d\tau}\delta\vartheta_{II} + \frac{d\mathbf{V}_{III}}{d\tau}\delta\vartheta_{III}.
\end{aligned}$$

Dieser Komponentenzerlegung entsprechend haben wir in der Gleichung $d\bar{\lambda} = 0$

$$d\bar{\vartheta} = d\vartheta_I \cdot \bar{\varepsilon}_I + d\vartheta_{II} \cdot \bar{\varepsilon}_{II} + d\vartheta_{III} \cdot \bar{\varepsilon}_{III},$$
$$\delta\bar{\vartheta} = \delta\vartheta_I \cdot \bar{\varepsilon}_I + \delta\vartheta_{II} \cdot \bar{\varepsilon}_{II} + \delta\vartheta_{III} \cdot \bar{\varepsilon}_{III}$$

zu setzen. Folglich erhält man

$$d\,\delta\bar{\vartheta} = d\,\delta\vartheta_I \cdot \bar{\varepsilon}_I + d\,\delta\vartheta_{II} \cdot \bar{\varepsilon}_{II} + d\,\delta\vartheta_{III} \cdot \bar{\varepsilon}_{III}$$
$$+ \delta\vartheta_I \cdot \overline{d\vartheta\,\varepsilon_I} + \delta\vartheta_{II} \cdot \overline{d\vartheta\,\varepsilon_{II}} + \delta\vartheta_{III} \cdot \overline{d\vartheta\,\varepsilon_{III}}$$

und eine ganz analoge Beziehung für $\delta\,d\bar{\vartheta}$.

Bildet man jetzt

$$\begin{aligned} 0 &= d\,\delta\bar{\vartheta} - \delta\,d\bar{\vartheta} - \overline{d\vartheta\,\delta\vartheta} \\ &= (d\,\delta\vartheta_I - \delta\,d\vartheta_I - d\vartheta_{II}\,\delta\vartheta_{III} + d\vartheta_{III}\,\delta\vartheta_{II})\,\bar{\varepsilon}_I \\ &+ (d\,\delta\vartheta_{II} - \delta\,d\vartheta_{II} - d\vartheta_{III}\,\delta\vartheta_I + d\vartheta_I\,\delta\vartheta_{III})\,\bar{\varepsilon}_{II} \\ &+ (d\,\delta\vartheta_{III} - \delta\,d\vartheta_{III} - d\vartheta_I\,\delta\vartheta_{II} + d\vartheta_{II}\,\delta\vartheta_I)\,\bar{\varepsilon}_{III} \\ &+ \delta\vartheta_I\,\overline{d\vartheta\,\varepsilon_I} - d\vartheta_I\,\overline{\delta\vartheta\,\varepsilon_I} + \delta\vartheta_{II}\,\overline{d\vartheta\,\varepsilon_{II}} - d\vartheta_{II}\,\overline{\delta\vartheta\,\varepsilon_{II}} \\ &\qquad + \delta\vartheta_{III}\,\overline{d\vartheta\,\varepsilon_{III}} - d\vartheta_{III}\,\overline{\delta\vartheta\,\varepsilon_{III}}, \end{aligned}$$

so folgt durch Bildung des Arbeitsproduktes mit $\bar{\varepsilon}_I$

$$0 = d\,\delta\vartheta_I - \delta\,d\vartheta_I - d\vartheta_{II}\,\delta\vartheta_{III} + d\vartheta_{III}\,\delta\vartheta_{II} - \delta\vartheta_{II}\,d\vartheta_{III} + d\vartheta_{II}\,\delta\vartheta_{III}$$
$$+ \delta\vartheta_{III}\,d\vartheta_{II} - d\vartheta_{III}\,\delta\vartheta_{II},$$

d. h.

$$\text{(a)} \begin{cases} d\,\delta\vartheta_I - \delta\,d\vartheta_I = -(d\vartheta_{II}\,\delta\vartheta_{III} - d\vartheta_{III}\,\delta\vartheta_{II}) \text{ und entsprechend} \\ d\,\delta\vartheta_{II} - \delta\,d\vartheta_{II} = -(d\vartheta_{III}\,\delta\vartheta_I - d\vartheta_I\,\delta\vartheta_{III}), \\ d\,\delta\vartheta_{III} - \delta\,d\vartheta_{III} = -(d\vartheta_I\,\delta\vartheta_{II} - d\vartheta_{II}\,\delta\vartheta_I). \end{cases}$$

Diese Beziehungen stellen den Übergang von der Operation δd zur Operation $d\delta$ dar. Wir nennen sie deshalb die Übergangsgleichungen der Komponenten von $d\bar{\vartheta}$ und $\delta\bar{\vartheta}$. Man hat zu beachten, daß die Gleichungen (a), welche zuerst zum gleichen Zwecke von Lagrange*) entwickelt wurden, keineswegs die einzig möglichen**) sind, sondern solche, welche zusammen mit der Bedingung $d\,\delta\bar{c} - \delta\,d\bar{c} = 0$ den Ausdruck $d\,\delta\bar{x} - \delta\,d\bar{x}$ zu Null machen.

*) Mécan. analytique. (2. ed.) Bd. 2, zweiter Teil, Sektion IX, Kapitel I. Paris 1815.

**) G. Hamel, Die virtuelleu Verschiebungen in der Mechanik. Math. Ann. Bd. 59, S. 416—434. 1904.

Ehe wir diesen Gedanken weiter verfolgen, soll die Ableitung*) der Übergangsgleichungen für $d\delta\bar{c}$ und $\delta d\bar{c}$ in bezug auf das Achsenkreuz $C_{I,II,III}$ gegeben werden. Die Zerlegung von $d\bar{c}$ wird dargestellt durch

$$d\bar{c} = dc_I \cdot \bar{\varepsilon}_I + dc_{II} \cdot \bar{\varepsilon}_{II} + dc_{III} \cdot \bar{\varepsilon}_{III}.$$

Hieraus folgt

$$\delta d\bar{c} = \delta dc_I \cdot \bar{\varepsilon}_I + \delta dc_{II} \cdot \bar{\varepsilon}_{II} + \delta dc_{III} \cdot \bar{\varepsilon}_{III} + dc_I \cdot \delta\bar{\varepsilon}_I + dc_{II} \cdot \delta\bar{\varepsilon}_{II} + dc_{III} \cdot \delta\bar{\varepsilon}_{III}$$

oder wegen

$$d\bar{\varepsilon} = \overline{d\vartheta\,\varepsilon}, \quad \delta\bar{\varepsilon} = \overline{\delta\vartheta\,\varepsilon}$$

$$0 = d\delta\bar{c} - \delta d\bar{c} = (d\delta c_I - \delta dc_I)\bar{\varepsilon}_I + (d\delta c_{II} - \delta dc_{II})\bar{\varepsilon}_{II} + (d\delta c_{III} - \delta dc_{III})\bar{\varepsilon}_{III} + \delta c_I \cdot \overline{d\vartheta\,\varepsilon_I} - dc_I \cdot \overline{\delta\vartheta\,\varepsilon_I} + \delta c_{II} \cdot \overline{d\vartheta\,\varepsilon_{II}} - dc_{II} \cdot \overline{\delta\vartheta\,\varepsilon_{II}} + \delta c_{III} \cdot \overline{d\vartheta\,\varepsilon_{III}} - dc_{III} \cdot \overline{\delta\vartheta\,\varepsilon_{III}}.$$

Die Arbeitsprodukte mit $\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_{II}, \bar{\varepsilon}_{III}$ geben sofort die verlangten Übergangsgleichungen in der Form:

$$\text{(b)} \begin{cases} d\delta c_I - \delta dc_I = \delta\vartheta_{II}\, dc_{III} - \delta\vartheta_{III}\, dc_{II} - (d\vartheta_{II}\,\delta c_{III} - d\vartheta_{III}\,\delta c_{II}), \\ d\delta c_{II} - \delta dc_{II} = \delta\vartheta_{III}\, dc_I - \delta\vartheta_I\, dc_{III} - (d\vartheta_{III}\,\delta c_I - d\vartheta_I\,\delta c_{III}), \\ d\delta c_{III} - \delta dc_{III} = \delta\vartheta_I\, dc_{II} - \delta\vartheta_{II}\, dc_I - (d\vartheta_I\,\delta c_{II} - d\vartheta_{II}\,\delta c_I). \end{cases}$$

Durch Einführung der Übergangsbeziehungen (a) und (b) wird die Zentralgleichung

$$\mathbf{q}_I\delta c_I + \mathbf{q}_{II}\delta c_{II} + \mathbf{q}_{III}\delta c_{III} + \mathbf{W}_I\delta\vartheta_I + \mathbf{W}_{II}\delta\vartheta_{II} + \mathbf{W}_{III}\delta\vartheta_{III}$$
$$= -\mathbf{p}_I(\omega_{II}\delta c_{III} - \omega_{III}\delta c_{II}) - \mathbf{p}_{II}(\omega_{III}\delta c_I - \omega_I\delta c_{III}) - \mathbf{p}_{III}(\omega_I\delta c_{II} - \omega_{II}\delta c_I)$$
$$+ \mathbf{p}_I(\delta\vartheta_{II}t_{III} - \delta\vartheta_{III}t_{II}) + \mathbf{p}_{II}(\delta\vartheta_{III}t_I - \delta\vartheta_I t_{III}) + \mathbf{p}_{III}(\delta\vartheta_I t_{II} - \delta\vartheta_{II}t_I)$$
$$- \mathbf{V}_I(\omega_{II}\delta\vartheta_{III} - \omega_{III}\delta\vartheta_{II}) - \mathbf{V}_{II}(\omega_{III}\delta\vartheta_I - \omega_I\delta\vartheta_{III}) - \mathbf{V}_{III}(\omega_I\delta\vartheta_{II} - \omega_{II}\delta\vartheta_I)$$
$$+ \frac{d\mathbf{p}_I}{d\tau}\delta c_I + \frac{d\mathbf{p}_{II}}{d\tau}\delta c_{II} + \frac{d\mathbf{p}_{III}}{d\tau}\delta c_{III} + \frac{d\mathbf{V}_I}{d\tau}\delta\vartheta_I + \frac{d\mathbf{V}_{II}}{d\tau}\delta\vartheta_{II} + \frac{d\mathbf{V}_{III}}{d\tau}\delta\vartheta_{III}$$

und hieraus folgen, da die Variationen $\delta c_I, \delta c_{II}, \delta c_{III}, \delta\vartheta_I, \delta\vartheta_{II}, \delta\vartheta_{III}$ willkürliche sind, die Eulerschen Gleichungen in der uns bekannten Form:

$$\mathbf{q}_I = \frac{d\mathbf{p}_I}{d\tau} + \omega_{II}\mathbf{p}_{III} - \omega_{III}\mathbf{p}_{II}, \qquad \mathbf{q}_{II} = \frac{d\mathbf{p}_{II}}{d\tau} + \omega_{III}\mathbf{p}_I - \omega_I\mathbf{p}_{III},$$

$$\mathbf{q}_{III} = \frac{d\mathbf{p}_{III}}{d\tau} + \omega_I\mathbf{p}_{II} - \omega_{II}\mathbf{p}_{III},$$

*) G. Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik. Leipzig 1877. S. 58—61.

$$\mathbf{W}_I = \frac{d\mathbf{V}_I}{d\tau} + \omega_{II}\,\mathbf{V}_{III} - \omega_{III}\mathbf{V}_{II} + t_{II}\,\mathbf{p}_{III} - t_{III}\,\mathbf{p}_{II}\,,$$

$$\mathbf{W}_{II} = \frac{d\mathbf{V}_{II}}{d\tau} + \omega_{III}\mathbf{V}_I - \omega_I\,\mathbf{V}_{III} + t_{III}\mathbf{p}_I - t_I\,\mathbf{p}_{III}\,,$$

$$\mathbf{W}_{III} = \frac{d\mathbf{V}_{III}}{d\tau} + \omega_I\,\mathbf{V}_{II} - \omega_{II}\,\mathbf{V}_I + t_I\,\mathbf{p}_{II} - t_{II}\,\mathbf{p}_I\,.$$

Dasselbe Resultat erhält man, wenn statt der Übergangsgleichung $d\bar{\lambda} = 0$ die Beziehung $d\,\delta\bar{\vartheta} - \delta\,d\bar{\vartheta} = 0$ gewählt wird. In diesem Falle wird

$$\frac{d\,\delta\bar{x}}{d\tau} - \frac{\delta\,d\bar{x}}{d\tau} = \overline{(\omega\,\delta\vartheta)(x - c)}$$

und infolgedessen

$$S\mu\bar{v}\left[\frac{d\,\delta\bar{x}}{d\tau} - \frac{\delta\,d\bar{x}}{d\tau}\right] = \overline{\omega\,\delta\vartheta}\cdot\bar{\mathbf{V}} = -\overline{\omega\mathbf{V}}\cdot\delta\bar{\vartheta}\,.$$

Die Durchführung der Rechnung ist bei dieser Annahme ebenso einfach wie im vorhergehenden Falle.

186. Lagrangesche Formeln für die Rotation des starren Körpers. Wir definieren (man vergleiche Nr. 176) jetzt für den rotierenden starren Körper, dessen Lage durch die Eulerschen Winkel φ, ψ, χ bestimmt ist, ganz analog wie in Nr. 185 je drei entsprechende Komponenten der Systemgeschwindigkeit und der Systembeschleunigung durch die Ansätze

$$S\mu\bar{v}\;\delta\bar{x} = \mathbf{P}_\varphi\cdot\delta\varphi + \mathbf{P}_\psi\cdot\delta\psi + \mathbf{P}_\chi\cdot\delta\chi\,,$$

$$S\mu\bar{w}\,\delta\bar{x} = \mathbf{Q}_\varphi\cdot\delta\varphi + \mathbf{Q}_\psi\cdot\delta\psi + \mathbf{Q}_\chi\cdot\delta\chi$$

und übertragen damit die Lagrangeschen Gleichungen auf die Rotationsbewegung des starren Systems.

Sie lauten in dieser erweiterten Form:

$$\frac{d\mathbf{P}_\varphi}{d\tau} - \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\varphi} = \mathbf{Q}_\varphi\,,\qquad \frac{d\mathbf{P}_\psi}{d\tau} - \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\psi} = \mathbf{Q}_\psi\,,\qquad \frac{d\mathbf{P}_\chi}{d\tau} - \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\chi} = \mathbf{Q}_\chi\,,$$

wo

$$\mathbf{P}_\varphi = \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\dot{\varphi}}\,,\quad \mathbf{P}_\psi = \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\dot{\psi}}\,,\quad \mathbf{P}_\chi = \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\dot{\chi}}$$

zu nehmen ist. Zur Ausführung der Differentialquotienten ist in

$$\mathbf{E} = \tfrac{1}{2}(T_I\,\omega_I^2 + T_{II}\,\omega_{II}^2 + T_{III}\,\omega_{III}^2)$$

nach Nr. 145

$$(\mathrm{a})\qquad \begin{cases} \omega_I = -\sin\psi\cdot\dot\varphi + \dot\chi \\ \omega_{II} = \cos\psi\sin\chi\cdot\dot\varphi + \cos\chi\cdot\dot\psi \\ \omega_{III} = \cos\psi\cos\chi\cdot\dot\varphi - \sin\chi\cdot\dot\psi \end{cases}$$

zu setzen, woraus umgekehrt

$$(\mathrm{a}')\qquad \begin{cases} \dot\varphi = \dfrac{\sin\chi}{\cos\psi}\cdot\omega_{II} + \dfrac{\cos\chi}{\cos\psi}\cdot\omega_{III} \\ \dot\psi = \cos\chi\cdot\omega_{II} - \sin\chi\cdot\omega_{III} \\ \dot\chi = \omega_I - \operatorname{tg}\psi\sin\chi\cdot\omega_{II} - \operatorname{tg}\psi\cos\chi\cdot\omega_{III} \end{cases}$$

folgt. Die Ausführung ergibt zunächst für die Lagrangeschen Komponenten der Systemgeschwindigkeit, welche wir auch gelegentlich die Lagrangeschen Impulskomponenten im Gegensatz zu den Eulerschen nennen:

$$(\mathrm{b})\qquad \begin{cases} \mathbf{P}_\varphi = -\sin\psi\cdot\mathbf{J}_I + \cos\psi\sin\chi\cdot\mathbf{J}_{II} + \cos\psi\cos\chi\cdot\mathbf{J}_{III}, \\ \mathbf{P}_\psi = \cos\chi\cdot\mathbf{J}_{II} - \sin\chi\cdot\mathbf{J}_{III}, \\ \mathbf{P}_\chi = \mathbf{J}_I. \end{cases}$$

und umgekehrt

$$(\mathrm{b}')\qquad \begin{cases} \mathbf{J}_I = \mathbf{P}_\chi, \\ \mathbf{J}_{II} = \dfrac{\sin\chi}{\cos\psi}\cdot\mathbf{P}_\varphi + \cos\chi\cdot\mathbf{P}_\psi + \sin\chi\operatorname{tg}\psi\cdot\mathbf{P}_\chi, \\ \mathbf{J}_{III} = \dfrac{\cos\chi}{\cos\psi}\cdot\mathbf{P}_\varphi - \sin\chi\cdot\mathbf{P}_\psi + \cos\chi\operatorname{tg}\psi\cdot\mathbf{P}_\chi. \end{cases}$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\varphi} = \frac{\partial\omega_I}{\partial\varphi}\mathbf{J}_I + \frac{\partial\omega_{II}}{\partial\varphi}\mathbf{J}_{II} + \frac{\partial\omega_{III}}{\partial\varphi}\mathbf{J}_{III}$$

usw., also

$$\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\psi} = -(\sin\chi\cdot\omega_{II} + \cos\chi\cdot\omega_{III})(\mathbf{J}_I + \operatorname{tg}\psi\sin\chi\cdot\mathbf{J}_{II} + \operatorname{tg}\psi\cos\chi\cdot\mathbf{J}_{III}),$$

$$\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\chi} = \omega_{III}\mathbf{J}_{II} - \omega_{II}\mathbf{J}_{III}.$$

Berechnet man nun

$$\frac{d\mathbf{P}_\varphi}{d\tau} = -\sin\psi\frac{d\mathbf{J}_I}{d\tau} + \cos\psi\sin\chi\frac{d\mathbf{J}_{II}}{d\tau} + \cos\psi\cos\chi\frac{d\mathbf{J}_{III}}{d\tau}$$
$$-\cos\psi\cdot\dot\psi\cdot\mathbf{J}_I - (\sin\psi\sin\chi\cdot\dot\psi - \cos\psi\cos\chi\cdot\dot\chi)\mathbf{J}_{II}$$
$$-(\sin\psi\cos\chi\cdot\dot\psi + \cos\psi\sin\chi\cdot\dot\chi)\mathbf{J}_{III}$$

und beachtet die Eulerschen Gleichungen

$$\frac{d\mathbf{J}_I}{d\tau} + \omega_{II}\mathbf{J}_{III} - \omega_{III}\mathbf{J}_{II} = \mathbf{W}_I, \quad \frac{d\mathbf{J}_{II}}{d\tau} + \omega_{III}\mathbf{J}_I - \omega_I\mathbf{J}_{III} = \mathbf{W}_{II},$$
$$\frac{d\mathbf{J}_{III}}{d\tau} + \omega_I\mathbf{J}_{II} - \omega_{II}\mathbf{J}_I = \mathbf{W}_{III},$$

so erhält man

$$\text{(c)}\quad\begin{cases} \mathbf{Q}_\varphi = -\sin\psi\cdot\mathbf{W}_I + \cos\psi\sin\chi\cdot\mathbf{W}_{II} + \cos\psi\cos\chi\cdot\mathbf{W}_{III}, \\ \mathbf{Q}_\psi = \cos\chi\cdot\mathbf{W}_{II} - \sin\chi\cdot\mathbf{W}_{III}, \\ \mathbf{Q}_\chi = \mathbf{W}_I. \end{cases}$$

Diese Gleichungen stellen den Zusammenhang der Lagrangeschen Komponenten der Systembeschleunigung mit den Komponenten des Eulerschen Vektors der Systembeschleunigung für ein im Körper festes Achsenkreuz $C_{I,\,II,\,III}$ dar.

187. Die den Eulerschen Winkeln entsprechenden Übergangsgleichungen für den Vektor der Winkelgeschwindigkeit. Aus den Eulerschen Relationen

$$d\vartheta_I = -\sin\psi\cdot d\varphi + d\chi$$

usw. folgt unmittelbar

$$\delta\, d\vartheta_I = -\sin\psi\cdot\delta\, d\varphi + \delta\, d\chi - \cos\psi\cdot\delta\psi\, d\varphi,$$

also auch

$$d\,\delta\vartheta_I - \delta\, d\vartheta_I = -\sin\psi(d\,\delta\varphi - \delta\, d\varphi) + d\,\delta\chi - \delta\, d\chi$$
$$-\cos\psi(d\psi\,\delta\varphi - d\varphi\,\delta\psi).$$

Die Annahmen

$$d\,\delta\varphi - \delta\, d\varphi = 0, \quad d\,\delta\psi - \delta\, d\psi = 0, \quad d\,\delta\chi - \delta\, d\chi = 0$$

haben daher die Beziehungen

$$d\,\delta\vartheta_I - \delta\, d\vartheta_I = -\cos\psi(d\psi\,\delta\varphi - d\varphi\,\delta\psi), \ldots$$

zur Folge. Nun ist aber

$$\cos\psi\cdot d\psi\,\delta\varphi=(\sin\chi\cdot\delta\vartheta_{II}+\cos\chi\cdot\delta\vartheta_{III})(\cos\chi\cdot d\vartheta_{II}-\sin\chi\cdot d\vartheta_{III})$$

und

$$\cos\psi\cdot d\varphi\,\delta\psi=(\sin\chi\cdot d\vartheta_{II}+\cos\chi\cdot d\vartheta_{III})(\cos\chi\cdot\delta\vartheta_{II}-\sin\chi\cdot\delta\vartheta_{III}).$$

Daraus und aus den Gleichungen für die beiden anderen Komponenten von $d\overline{\vartheta}, \delta\overline{\vartheta}$ gewinnt man die Übergangsgleichungen:

$$d\,\delta\vartheta_I - \delta\,d\vartheta_I = d\vartheta_{III}\,\delta\vartheta_{II} - d\vartheta_{II}\,\delta\vartheta_{III}, \ldots$$

welche mit den bisher benutzten vollständig übereinstimmen.

Aufgabe 61. Man leite aus den Komponentengleichungen für $\overline{\omega}$ (Nr. 145) die entsprechenden Übergangsgleichungen in bezug auf das ruhende Achsenkreuz $C_{1,2,3}$ ab.

188. Beschränkte Bewegung des starren Körpers. Bei unseren bisherigen Entwicklungen haben wir den Körper entweder als vollständig frei beweglich angenommen oder vorausgesetzt, daß er sich frei um einen festen Punkt drehen kann. Die allgemeine Beweglichkeit mit sechs Graden der Freiheit ($c_1, c_2, c_3, \varphi, \psi, \chi$) soll nun im folgenden beschränkt werden. Zur Aufstellung der Systemvektoren in diesem Falle bieten sich verschiedene methodische Wege, die bisher nicht einmal vollständig durchgearbeitet sind. Für den Anfänger empfiehlt sich jedoch besonders einer, welcher seinen Ausgangspunkt in der Zentralgleichung nimmt. Er ist zur Durchführung spezieller Probleme nicht immer der kürzeste und bequemste, hat aber den großen Vorteil, daß er die allgemeinen Gesichtspunkte mit gleichmäßiger Klarheit und Deutlichkeit erkennen läßt.

Statt der rechtwinkligen Koordinaten c_1, c_2, c_3 führen wir die ihnen proportionalen Zahlen

$$\frac{c_1}{m} = \varphi_1, \quad \frac{c_2}{m} = \varphi_2, \quad \frac{c_3}{m} = \varphi_3$$

ein, wo also m eine beliebige Länge (Einheitsstrecke) bedeutet und bezeichnen die drei Eulerschen Winkel φ, ψ, χ mit $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$. Die Position des frei beweglichen starren

Körpers*) ist dann bestimmt durch die sechs Koordinaten

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$$

und die Elementargeschwindigkeit eines Massenpunktes $(\bar{x})$ läßt sich in der Form

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \bar{e}_1 \frac{d\varphi_1}{d\tau} + \bar{e}_2 \frac{d\varphi_2}{d\tau} + \bar{e}_3 \frac{d\varphi_3}{d\tau} + \bar{e}_4 \frac{d\varphi_4}{d\tau} + \bar{e}_5 \frac{d\varphi_5}{d\tau} + \bar{e}_6 \frac{d\varphi_6}{d\tau}$$

schreiben, was wir auch abgekürzt durch

$$(1) \qquad \bar{v} = \sum_{\nu=1}^{\nu=6} \bar{e}_\nu \dot{\varphi}_\nu$$

ausdrücken.

Bisher hatten wir wiederholt die den Eulerschen Winkeln $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ (φ, ψ, χ) entsprechenden Geschwindigkeiten durch die drei Komponenten der Rotationsgeschwindigkeit also durch $\omega_I, \omega_{II}, \omega_{III}$ oder durch $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ lineär darzustellen (Nr. 186, Gleichung (a')). Diese Transformation fassen wir jetzt allgemeiner auf, indem wir

$$(2) \qquad \dot{\varphi}_\nu = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=6} \varkappa_{\nu\lambda} \cdot \omega_\lambda$$

setzen, wobei die Koeffizienten $\varkappa_{\nu\lambda}$ Funktionen der Koordinaten $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_6$ bedeuten sollen. Ist nun die Determinante aller $\varkappa_{\nu\lambda}$ von Null verschieden, so kann man die Gleichungen (2) nach den ω auflösen und erhält

$$(3) \qquad \omega_\lambda = \sum_{\nu=1}^{\nu=6} \pi_{\lambda\nu} \cdot \dot{\varphi}_\nu .$$

Durch die Einführung der ω in die Gleichung (1) wird $\bar{v}$ eine lineäre Funktion dieser Größen, die entweder alle oder zum Teil den Charakter der Eulerschen Größen $\omega_I, \omega_{II}, \omega_{III}$ haben, also nicht notwendigerweise Zeitderivierte von positionsbestimmenden Größen sind. Wir wollen sie daher allgemein als lediglich die Geschwindigkeit bestimmenden Parameter bezeichnen und so generell von den $\dot{\varphi}$ unterscheiden.

*) Die nachstehenden Entwicklungen schließen sich ganz an die Arbeit von G. Hamel „Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik" Leipzig (Teubner) 1903 an. Diese Sonder-Ausgabe ist identisch mit der gleichnamigen Abhandlung, welche im 50. Bd. der Zeitschr. f. Mathem. u. Physik erschien.

Eine Beschränkung der Beweglichkeit des Systems kann in mannigfacher Form auftreten. Sie ist z. B. gegeben durch Gleichungen von dem Typus

$$\text{(a)}\quad F_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_6) = 0, \ldots F_\varrho(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_6) = 0 \quad \varrho < 6.$$

Diese Bedingungen werden also direkt den Koordinaten auferlegt.

Aus ihnen folgt durch Differentiation

$$\text{(b)}\quad \begin{cases} F_{11}\, d\varphi_1 + F_{12}\, d\varphi_2 + \ldots + F_{16}\, d\varphi_6 = 0, \\ F_{21}\, d\varphi_1 + F_{22}\, d\varphi_2 + \ldots + F_{26}\, d\varphi_6 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_{\varrho 1}\, d\varphi_1 + F_{\varrho 2}\, d\varphi_2 + \ldots + F_{\varrho 6}\, d\varphi_6 = 0, \end{cases}$$

und es bestehen dieselben Beziehungen für die $\delta\varphi$, da nach unserer bisherigen Auffassung die virtuellen Verschiebungen stets möglichen Verschiebungen entsprechen sollen. Man wird in diesem Falle entweder aus den Gleichungen (a) direkt ϱ der Koordinaten φ eliminieren oder alle φ durch $6 - \varrho$ neue Koordinaten ψ ausdrücken, so daß die Gleichungen (a) identisch erfüllt sind.

Als einen zweiten Typus von Bedingungsgleichungen, welche die Beweglichkeit des Körpers beschränken, wollen wir skalare Beziehungen zwischen $\bar{t}$ und $\bar{\omega}$ von der Form (Nr. 124):

$$\text{(c)}\quad \begin{cases} \bar{\varepsilon}_1\, \bar{t} + \bar{e}_1\, \bar{\omega} = 0, \\ \bar{\varepsilon}_2\, \bar{t} + \bar{e}_2\, \bar{\omega} = 0, \\ \cdots\cdots \\ \bar{\varepsilon}_\varrho\, \bar{t} + \bar{e}_\varrho\, \bar{\omega} = 0, \qquad \varrho < 6 \end{cases}$$

betrachten. Jede dieser Gleichungen stellt eine dem Geschwindigkeitssystem $(\bar{t}, \bar{\omega})$ entsprechenden linearen Komplex (Nr. 124) dar. Für $\varrho = 5$ ist das Geschwindigkeitssystem bis auf einen Proportionalitätsfaktor bestimmt, denn man hat jetzt fünf lineäre Gleichungen

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{11}\, t_1 + \varepsilon_{12}\, t_2 + \varepsilon_{13}\, t_3 + e_{11}\, \omega_1 + e_{12}\, \omega_2 + e_{13}\, \omega_3 = 0, \\ &\varepsilon_{21}\, t_1 + \varepsilon_{22}\, t_2 + \varepsilon_{23}\, t_3 + e_{21}\, \omega_1 + e_{22}\, \omega_2 + e_{23}\, \omega_3 = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\varepsilon_{51}\, t_1 + \varepsilon_{52}\, t_2 + \varepsilon_{53}\, t_3 + e_{51}\, \omega_1 + e_{52}\, \omega_2 + e_{53}\, \omega_3 = 0, \end{aligned}$$

aus denen die Verhältnisse $t_1 : t_2 : t_3 : \omega_1 : \omega_2 : \omega_3$ eindeutig folgen.

Auf Bedingungsgleichungen derselben Art führen die Rollprobleme. Hier muß die absolute Geschwindigkeit des momentanen Kontaktpunktes ($\bar{x}'$) gleich null sein. Man hat also

$$\text{(d)} \qquad \bar{t} + \overline{\omega(x' - c)} = 0\,.$$

Die Komponenten von $\bar{x}'$ sind jetzt Funktionen von $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ und man erkennt, daß die vektorielle Gleichung (d) sich auch in der Form

$$\text{(d')} \left\{\begin{aligned} f_{11}\cdot d\varphi_1 + f_{12}\cdot d\varphi_2 + f_{13}\cdot d\varphi_3 + f_{14}\cdot d\varphi_4 + f_{15}\cdot d\varphi_5 + f_{16}\cdot d\varphi_6 = 0\,,\\ f_{21}\cdot d\varphi_1 + f_{22}\cdot d\varphi_2 + f_{23}\cdot d\varphi_3 + f_{24}\cdot d\varphi_4 + f_{25}\cdot d\varphi_5 + f_{26}\cdot d\varphi_6 = 0\,,\\ f_{31}\cdot d\varphi_1 + f_{32}\cdot d\varphi_2 + f_{33}\cdot d\varphi_3 + f_{34}\cdot d\varphi_4 + f_{35}\cdot d\varphi_5 + f_{36}\cdot d\varphi_6 = 0 \end{aligned}\right.$$

darstellen lassen, wo die f Funktionen der Positionskoordinaten (oder teilweise konstant oder null) sind. Da nun die Gleichungen (d') nicht durch Differentiation aus Gleichungen von der Form (a) entstanden sind, so werden sie im allgemeinen auch nicht auf solche zurückführbar, d. h. nicht integrabel sein.

Zusammenfassend können wir die bisher betrachteten die Bewegung einschränkenden Bedingungsgleichungen in der Form

$$\text{(e)} \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=6} f_{\iota\nu}\cdot d\varphi_\nu = 0\,, \qquad \iota = 1, 2, \ldots \varrho$$

schreiben und diese den weiteren Entwicklungen (vgl. Nr. 191) zugrunde legen.

189. Allgemeine Auffassung*) der Übergangsgleichungen. Zum Ausgangspunkte der nächstfolgenden Betrachtungen nehmen wir die Gleichungen (1) bis (3) der vorigen Nummer, nämlich

$$\text{(1)} \qquad \bar{v} = \sum_\nu \bar{e}_\nu \cdot \dot{\varphi}_\nu\,,$$

$$\text{(2)} \qquad \dot{\varphi}_\nu = \sum_\lambda \varkappa_{\nu\lambda}\cdot\omega_\lambda\,,$$

$$\text{(3)} \qquad \omega_\lambda = \sum_\nu \pi_{\lambda\nu}\cdot\dot{\varphi}_\nu$$

*) G. Hamel, *Lagrange-Eulersche Gleichungen*, S. 9—14 und seine Abhandlung: *Über die virtuellen Verschiebungen in der Mechanik.* Mathem. Ann. Bd. 59, S. 416—434.

und schreiben, obwohl die ω im allgemeinen keine totalen Differentialquotienten nach der Zeit sind, dennoch

$$\omega_\lambda = \frac{d\vartheta_\lambda}{d\tau} \quad \text{und} \quad d\vartheta_\lambda = \sum_\nu \pi_{\lambda\nu} \cdot d\varphi_\nu\,,$$

wie wir dies auch bei der speziellen Bedeutung der ω (als Winkelgeschwindigkeiten) immer getan haben.

Nach diesen Festsetzungen wird

$$(4) \qquad d\bar{x} = \sum_\nu [\bar{c}_\nu \cdot \sum_\lambda \varkappa_{\nu\lambda} \cdot d\vartheta_\lambda] = \sum_\nu \bar{n}_\nu \cdot d\vartheta_\nu\,,$$

wo zur Abkürzung

$$(5) \qquad \bar{n} = \sum_\lambda \varkappa_{\lambda\nu} \cdot \bar{e}_\lambda$$

steht. Da die Gleichung (4) auch für das Symbol δ gilt, so wird

$$(6) \quad d\,\delta\bar{x} - \delta\,d\bar{x} = \sum_\nu \bar{n}_\nu(d\,\delta\vartheta_\nu - \delta\,d\vartheta_\nu) + \sum_\nu (d\bar{n}_\nu\,\delta\vartheta_\nu - \delta\bar{n}_\nu\,d\vartheta_\nu)\,.$$

Nach Gleichung (5) ist aber

$$d\bar{n}_\nu = \sum_\lambda \varkappa_{\lambda\nu} \cdot d\bar{e}_\lambda + \sum_\lambda d\varkappa_{\lambda\nu} \cdot \bar{e}_\lambda$$

und infolgedessen

$$d\bar{n}_\nu\,\delta\vartheta_\nu - \delta\bar{n}_\nu\,d\vartheta_\nu = \sum_\lambda \varkappa_{\lambda\nu}(d\bar{e}_\lambda\,\delta\vartheta_\nu - \delta\bar{e}_\lambda\,d\vartheta_\nu)$$
$$+ \sum_\lambda \bar{e}_\lambda(d\varkappa_{\lambda\nu}\,\delta\vartheta_\nu - \delta\varkappa_{\lambda\nu}\,d\vartheta_\nu)\,.$$

Die Ausführung der Differentiale gibt

$$d\bar{e}_\lambda = \sum_\sigma \frac{\partial \bar{e}_\lambda}{\partial \varphi_\sigma} d\varphi_\sigma = \sum_{\sigma,\varrho} \frac{\partial \bar{e}_\lambda}{\partial \varphi_\sigma} \varkappa_{\sigma\varrho} \cdot d\vartheta_\varrho$$

und

$$d\varkappa_{\lambda\nu} = \sum_{\sigma,\varrho} \frac{\partial \varkappa_{\lambda\nu}}{\partial \varphi_\sigma} \varkappa_{\sigma\varrho} \cdot d\vartheta_\varrho\,.$$

Hiermit geht die Gleichung (6) über in

$$d\,\delta\bar{x} - \delta\,d\bar{x} = \sum_\nu \bar{n}_\nu(d\,\delta\vartheta_\nu - \delta\,d\vartheta_\nu)$$
$$+ \sum_{\nu,\lambda} \sum_{\sigma,\varrho} \varkappa_{\lambda\nu} \frac{\partial \bar{e}_\lambda}{\partial \varphi_\sigma} \varkappa_{\sigma\varrho}(d\vartheta_\varrho\,\delta\vartheta_\nu - \delta\vartheta_\varrho\,d\vartheta_\nu)$$
$$+ \sum_{\nu,\lambda} \sum_{\sigma,\varrho} \bar{e}_\lambda \frac{\partial \varkappa_{\lambda\nu}}{\partial \varphi_\sigma} \varkappa_{\sigma\varrho}(d\vartheta_\varrho\,\delta\vartheta_\nu - \delta\vartheta_\varrho\,d\vartheta_\nu)$$

Vertauscht man in den zweiten Gliedern des zweiten und dritten Summenausdruckes rechts die Indizes ϱ, ν und in dem zweiten Summenausdrucke auch noch die Indizes λ, σ miteinander, so erhält man

$$
(7)\quad \begin{cases} d\,\delta\bar{x} - \delta\,d\bar{x} = \sum_\nu \bar{n}_\nu (d\,\delta\vartheta_\nu - \delta\,d\vartheta_\nu) \\ \quad + \sum_{\nu,\lambda}\sum_{\sigma,\varrho} \varkappa_{\lambda\nu}\cdot\varkappa_{\sigma\varrho}\left(\frac{\partial \bar{e}_\lambda}{\partial \varphi_\sigma} - \frac{\partial \bar{e}_\sigma}{\partial \varphi_\lambda}\right) d\vartheta_\varrho\,\delta\vartheta_\nu \\ \quad + \sum_{\lambda,\nu}\sum_{\sigma,\varrho} \bar{e}_\lambda \left(\frac{\partial \varkappa_{\lambda\nu}}{\partial \varphi_\sigma}\varkappa_{\sigma\varrho} - \frac{\partial \varkappa_{\lambda\varrho}}{\partial \varphi_\sigma}\varkappa_{\sigma\nu}\right) d\vartheta_\varrho\,\delta\vartheta_\nu\,. \end{cases}
$$

Nun folgt aber aus der Definition der Begleitvektoren $\bar{e}$:

$$
\frac{\partial \bar{e}_\lambda}{\partial \varphi_\sigma} = \frac{\partial \bar{e}_\sigma}{\partial \varphi_\lambda} = \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial \varphi_\sigma\,\partial \varphi_\lambda}\,.
$$

Das zweite Glied in dem Ausdruck für $d\,\delta\bar{x} - \delta\,d\bar{x}$ fällt also heraus und es bleibt

$$
(8)\quad \begin{cases} d\,\delta\bar{x} - \delta\,d\bar{x} = \sum_\nu \bar{n}_\nu (d\,\delta\vartheta_\nu - \delta\,d\vartheta_\nu) \\ + \sum_{\lambda,\nu}\sum_{\sigma,\varrho} \bar{e}_\lambda \left(\frac{\partial \varkappa_{\lambda\nu}}{\partial \varphi_\sigma}\varkappa_{\sigma\varrho} - \frac{\partial \varkappa_{\lambda\varrho}}{\partial \varphi_\sigma}\varkappa_{\sigma\nu}\right) d\vartheta_\varrho\,\delta\vartheta_\nu\,. \end{cases}
$$

Um auch in dem zweiten Glied der rechten Seite dieser Gleichung $\bar{n}$ an Stelle von $\bar{e}$ einzuführen, beachte man die Beziehungen

$$
(9)\quad \sum_\lambda \varkappa_{\nu\lambda}\cdot\pi_{\lambda\nu} = 1 \quad \text{und} \quad \sum_\lambda \varkappa_{\nu\lambda}\cdot\pi_{\lambda\mu} = 0 \qquad (\nu \gtrless \mu)
$$

und ferner, daß aus

$$
\bar{n}_\nu = \sum_\lambda \varkappa_{\lambda\nu}\cdot\bar{e}_\lambda \quad \text{umgekehrt} \quad \bar{e}_\lambda = \sum_\nu \pi_{\nu\lambda}\cdot\bar{n}_\nu
$$

folgt. Jetzt wird

$$
d\,\delta\bar{x} - \delta\,d\bar{x} = \sum_\nu \bar{n}_\nu \Big[d\,\delta\vartheta_\nu - \delta\,d\vartheta_\nu
$$

$$
+ \sum_{\lambda,\mu}\sum_{\sigma,\varrho} \pi_{\nu\lambda}\left(\frac{\partial \varkappa_{\lambda\mu}}{\partial \varphi_\sigma}\cdot\varkappa_{\sigma\varrho} - \frac{\partial \varkappa_{\lambda\varrho}}{\partial \varphi_\sigma}\cdot\varkappa_{\sigma\mu}\right) d\vartheta_\varrho\,\delta\vartheta_\mu \Big]\,.
$$

Setzt man noch zur Abkürzung

$$
(10)\qquad \beta_{\varrho\mu\nu} = \sum_{\varrho,\sigma} \pi_{\nu\lambda}\left(\frac{\partial \varkappa_{\lambda\mu}}{\partial \varphi_\sigma}\cdot\varkappa_{\sigma\varrho} - \frac{\partial \varkappa_{\lambda\varrho}}{\partial \varphi_\sigma}\cdot\varkappa_{\sigma\mu}\right)
$$

oder, da nach den Relationen (9)

$$\sum_\lambda \pi_{\nu\lambda} \frac{\partial \varkappa_{\lambda\mu}}{\partial \varphi_\sigma} = -\sum_\lambda \varkappa_{\lambda\mu} \frac{\partial \pi_{\nu\lambda}}{\partial \varphi_\sigma}$$

ist,

$$\beta_{\varrho\mu\nu} = \sum_{\lambda,\sigma} \varkappa_{\lambda\varrho} \cdot \varkappa_{\sigma\mu} \left(\frac{\partial \pi_{\nu\lambda}}{\partial \varphi_\sigma} - \frac{\partial \pi_{\nu\sigma}}{\partial \varphi_\lambda}\right) \tag{11}$$

und vertauschen in den ersten Gliedern des obigen Ausdruckes für die β noch die Indizes λ und σ, dann erhält man die Übergangsgleichung in der übersichtlichen Form*)

$$d\,\delta\bar{x} - \delta\,d\bar{x} = \sum_\nu \bar{n}_\nu [d\,\delta\vartheta_\nu - \delta\,d\vartheta_\nu + \sum_{\varrho,\mu} \beta_{\varrho\mu\nu} \cdot d\vartheta_\varrho\,\delta\vartheta_\mu]\,. \tag{12}$$

Neben diese fundamentale Beziehung stellen wir noch die Übergangsgleichungen für $d\,\delta\vartheta_\lambda$ und $\delta\,d\vartheta_\lambda$. Aus

$$d\vartheta_\lambda = \sum_\nu \pi_{\lambda\nu} \cdot d\varphi_\nu \quad \text{und} \quad \delta\vartheta_\lambda = \sum_\nu \pi_{\lambda\nu} \cdot \delta\varphi_\nu$$

folgt sofort

$$d\,\delta\vartheta_\lambda - \delta\,d\vartheta_\lambda$$
$$= \sum_\nu \pi_{\lambda\nu}(d\,\delta\varphi_\nu - \delta\,d\varphi_\nu) + \sum_\nu (d\pi_{\lambda\nu} \cdot \delta\varphi_\nu - \delta\pi_{\lambda\nu} \cdot d\varphi_\nu)\,.$$

Das zweite Glied wird nach Ausführung der Differentiationen d und δ:

$$\sum_\nu \left[\delta\varphi_\nu \cdot \sum_\sigma \frac{\partial \pi_{\lambda\nu}}{\partial \varphi_\sigma} d\varphi_\sigma - d\varphi_\nu \cdot \sum_\sigma \frac{\partial \pi_{\lambda\nu}}{\partial \varphi_\sigma} \delta\varphi_\sigma\right]$$
$$= \sum_{\sigma,\nu} \left(\frac{\partial \pi_{\lambda\nu}}{\partial \varphi_\sigma} - \frac{\partial \pi_{\lambda\sigma}}{\partial \varphi_\nu}\right) d\varphi_\sigma\,\delta\varphi_\nu\,,$$

nach Vertauschung der Indizes. Setzt man in den letzten Ausdruck noch die Werte von $d\varphi_\sigma$ und $\delta\varphi_\nu$ nach der Gleichung (2) ein, dann ergibt sich mit Benutzung der durch Gleichung (11) definierten Abkürzung:

$$d\,\delta\vartheta_\lambda - \delta\,d\vartheta_\lambda = \sum_\nu \pi_{\lambda\nu}(d\,\delta\varphi_\nu - \delta\,d\varphi_\nu) - \sum_{\varrho,\mu} \beta_{\varrho\mu\lambda}\, d\vartheta_\varrho\,\delta\vartheta_\mu \tag{13}$$

als die verlangte Übergangsgleichung**). Für $d\,\delta\varphi_\nu = \delta\,d\varphi_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots 6)$ wird nach Gleichung (12) $d\,\delta\bar{x} - \delta\,d\bar{x} = 0$.

---

*) Hamel, a. a. O., Seite 422, Gleichung (I').
**) Hamel, a. a. O., Seite 422, Gleichung (I).

Denn Gleichung (12) gilt auch, wenn man statt der ϑ die φ benutzt. Nur werden dann die Koeffizienten β zu Null, da jetzt alle π die Werte 0 oder 1 haben, ihre Differentialquotienten also verschwinden. Ferner werden die $\bar{n}$ gleich $\bar{e}$ und aus Gleichung (12′) $d\,\delta\bar{x} - \delta\,d\bar{x} = \sum_\nu \bar{e}_\nu(d\,\delta\varphi_\nu - \delta\,d\varphi_\nu)$ folgt jetzt, daß für $d\,\delta\varphi_\nu - \delta\,d\varphi_\nu = 0$ auch $d\,\delta\bar{x} - \delta\,d\bar{x} = 0$ gesetzt werden muß. In diesem Falle ist also

$$d\,\delta\vartheta_\lambda = \delta\,d\vartheta_\lambda - \sum_{\varrho,\mu} \beta_{\varrho,\mu,\lambda} \cdot d\vartheta_\varrho\,\delta\vartheta_\mu\,. \tag{14}$$

Wollte man*) mit Hilfe dieser Formel die Übergangsgleichungen (b) und (a) von Nr. 185 gewinnen, dann hätte man schematisch 56 Koeffizienten β auszuwerten, da $\nu = 6$ ist. Die $\varkappa$ und π wären aus den folgenden Übersichten zu entnehmen:

$\varkappa$	$\nu = 1$	2	3	4	5	6
$\lambda = 1$	1	.	.	.	.	.
2	.	1	.	.	.	.
3	.	.	1	.	.	.
4	.	.	.	.	.	1
5	.	.	.	$\frac{\sin\varphi_6}{\cos\varphi_5}$	$\cos\varphi_6$	$-\operatorname{tg}\varphi_5 \sin\varphi_6$
6	.	.	.	$\frac{\cos\varphi_6}{\cos\varphi_5}$	$-\sin\varphi_6$	$-\operatorname{tg}\varphi_5 \cos\varphi_6$

π	$\lambda = 1$	2	3	4	5	6
$\nu = 1$	1	.	.	.	.	.
2	.	1	.	.	.	.
3	.	.	1	.	.	.
4	.	.	.	$-\sin\varphi_5$	$\cos\varphi_5 \sin\varphi_6$	$\cos\varphi_5 \cos\varphi_6$
5	.	.	.	.	$\cos\varphi_6$	$-\sin\varphi_6$
6	.	.	.	1	.	.

*) Vergleiche Nr. 186, Gleichung (a) und (a′).

An den punktierten Stellen sind die Werte der betreffenden Koeffizienten gleich Null.

Will man die Koeffizienten β berechnen, so erweist es sich durchgängig als vorteilhafter, nicht unter Benutzung einer solchen Tabelle die Gleichungen (11) zu verwenden, sondern die Rechnungen dieser Nummer für den gerade vorliegenden konkreten Fall wirklich durchzuführen, indem man auf die Beziehungen der $d\bar{x}$ zu den $d\vartheta$ und, wenn nötig, der $d\varphi$ zu den $d\vartheta$ zurückgeht. Man vergleiche die schon in Nr. 185 ausgeführte Herleitung der Übergangsgleichungen für die Komponenten von $\overline{\omega}$.

190. Die allgemeinen Komponenten der Systembeschleunigung des starren Körpers. Es sind jetzt — wie bisher — drei Gruppen von Veränderlichen ins Auge zu fassen, erstens das System der Positionskoordinaten

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_6,$$

welche die Lage des Körpers eindeutig feststellen, zweitens das System der Koordinatengeschwindigkeiten

$$\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dots \dot{\varphi}_6$$

und drittens die Größen

$$\omega_1, \omega_2, \dots \omega_6,$$

welche durch die Gleichungen (2) und (3) von Nr. 189 mit den vorangehenden Gruppen verknüpft sind. Nach diesen Annahmen definieren wir zwei Komplexe von kinematischen Systemgrößen für eine beliebige Bewegung des starren Körpers durch die Gleichungen

$$\text{(a)} \qquad S\mu\bar{v}\,\delta\bar{x} = \sum_{\iota=1}^{\iota=6} \mathbf{V}_\iota\,\delta\vartheta_\iota$$

$$\text{(b)} \qquad S\mu\bar{w}\,\delta\bar{x} = \sum_{\iota=1}^{\iota=6} \mathbf{W}_\iota\,\delta\vartheta_\iota$$

und nennen $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots \mathbf{V}_6$ die allgemeinen Komponenten der *Impulsion*, sowie $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots \mathbf{W}_6$ die allgemeinen Komponenten der *Beschleunigung* des Systems. Mit diesen Bezeichnungen lautet die Zentralgleichung (Nr. 185):

$$\text{(c)} \quad \frac{d}{d\tau}\left[\sum_\iota \mathbf{V}_\iota\,\delta\vartheta_\iota\right] - \delta\mathbf{E} - S\mu\bar{v}\left(\frac{d\,\delta\bar{x}}{d\tau} - \frac{\delta\,d\bar{x}}{d\tau}\right) = \sum_\iota \mathbf{W}_\iota\,\delta\vartheta_\iota\,.$$

Nun ist aber

$$S\mu\bar{v}\cdot\delta\bar{x} = S\left[\mu\bar{v}\sum_\iota \bar{n}_\iota\,\delta\vartheta_\iota\right] = \sum_\iota [S\mu(\bar{v}\cdot\bar{n})\,\delta\vartheta_\iota] = \sum_\iota \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial\omega_\iota}\,\delta\vartheta_\iota$$

und es folgt daraus nach der Definitionsgleichung (a):

$$\text{(d)} \qquad \mathbf{V}_\iota = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial\omega_\iota} = S\mu(\bar{v}\cdot\bar{n})\,.$$

Führen wir also den Ausdruck (12) aus Nr. 189 in das Glied

$$S\mu\bar{v}\left(\frac{d\,\delta\bar{x}}{d\tau} - \frac{\delta\,d\bar{x}}{d\tau}\right)$$

ein, so erhalten wir, wenn wir beachten, daß $\beta_{\varrho\mu\iota} = -\beta_{\mu\varrho\iota}$ ist,

$$S\mu\bar{v}\left(\frac{d\,\delta\bar{x}}{d\tau} - \frac{\delta\,d\bar{x}}{d\tau}\right)$$

$$= \sum_\iota \mathbf{V}_\iota\left(\frac{d\,\delta\vartheta_\iota}{d\tau} - \frac{\delta\,d\vartheta_\iota}{d\tau}\right) - \sum_\iota\left[\mathbf{V}_\iota \sum_{\varrho,\mu} \beta_{\varrho\mu\iota}\,\delta\vartheta_\varrho\,\frac{d\vartheta_\mu}{d\tau}\right]$$

und die Zentralgleichung wird

$$\sum_\iota \mathbf{W}_\iota\,\delta\vartheta_\iota = \frac{d}{d\tau}\sum_\iota \mathbf{V}_\iota\,\delta\vartheta_\iota - \delta\mathbf{E} - \sum_\iota \mathbf{V}_\iota\left(\frac{d\,\delta\vartheta_\iota}{d\tau} - \frac{\delta\,d\vartheta_\iota}{d\tau}\right)$$

$$+ \sum_\iota\left[\mathbf{V}_\iota \sum_{\varrho,\mu} \beta_{\varrho\mu\iota}\,\delta\vartheta_\varrho\,\frac{d\vartheta_\mu}{d\tau}\right].$$

Hierin ist noch

$$\delta\mathbf{E} = \sum_\iota \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\omega_\iota}\,\delta\omega_\iota + \sum_\iota\left[\sum_\varrho \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\varphi_\varrho}\,\varkappa_{\varrho\iota}\right]\delta\vartheta_\iota$$

einzuführen und

$$\frac{d}{d\tau}\sum_\iota \mathbf{V}_\iota\,\delta\vartheta_\iota = \sum_\iota \mathbf{V}_\iota\,\frac{d\,\delta\vartheta_\iota}{d\tau} + \sum_\iota \frac{d\mathbf{V}_\iota}{d\tau}\,\delta\vartheta_\iota$$

zu setzen. Man erhält dann

$$\sum_\iota \mathbf{W}_\iota\,\delta\vartheta_\iota = \sum_\iota \left\{\frac{d\mathbf{V}_\iota}{d\tau} + \sum_{\varrho,\mu} \beta_{\iota\mu\varrho}\cdot\omega_\mu \mathbf{V}_\varrho - \sum_\varrho \varkappa_{\varrho\iota}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\varphi_\varrho}\right\}\delta\vartheta_\iota$$

und damit für die allgemeinen Komponenten der Beschleunigung des starren Systems den Ausdruck*)

$$\text{(e)} \qquad \mathbf{W}_\iota = \frac{d\mathbf{V}_\iota}{d\tau} + \sum_{\varrho,\mu} \beta_{\iota\mu\varrho} \cdot \omega_\mu \mathbf{V}_\varrho - \sum_\varrho \varkappa_{\varrho\iota} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \varphi_\varrho},$$

worin die allgemeinen Komponenten der Impulsion nach Gleichung (d)

$$\mathbf{V}_\iota = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \omega_\iota}$$

zu nehmen sind.

Aus den Gleichungen (e) müssen natürlich sowohl die Eulerschen Komponenten der Beschleunigung (Nr. 180) als auch die Lagrangeschen Komponenten ($\mathbf{Q}_\varphi$, $\mathbf{Q}_\psi$, $\mathbf{Q}_\chi$ in Nr. 186) als spezielle Fälle der allgemeinen Auffassung folgen.

191. Verwendung der Geschwindigkeitsparameter ω_λ beim Auftreten nicht integrabler Bedingungsgleichungen. Wenn die Bewegung des starren Körpers durch die Gleichungen (e) in Nr. 188:

$$\text{(a)} \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=6} f_{\iota\nu} \cdot d\varphi_\nu = 0, \qquad \iota = 1, 2, \ldots \varrho$$

beschränkt ist, so kann man die ω_λ so wählen, daß die Bedingungsgleichungen die Form annehmen

$$\text{(a')} \qquad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \ldots \quad \omega_\varrho = 0$$

und daß dementsprechend für die virtuellen Verschiebungen $\delta\varphi_1, \delta\varphi_2, \ldots \delta\varphi_6$ die Gleichungen bestehen:

$$\text{(b)} \qquad \delta\vartheta_1 = 0, \quad \delta\vartheta_2 = 0, \quad \ldots \quad \delta\vartheta_\varrho = 0.$$

Man erreicht dies, indem man setzt

$$\text{(c)} \qquad \omega_\iota = \sum_{\nu=1}^{\nu=6} f_{\iota\nu} \cdot \dot{\varphi}_\nu, \qquad \iota = 1, 2, \ldots \varrho$$

$$\text{(d)} \qquad \omega_\sigma = \sum_{\nu=1}^{\nu=6} \pi_{\sigma\nu} \cdot \dot{\varphi}_\nu, \qquad \sigma = \varrho + 1, \varrho + 2, \ldots 6,$$

---

*) Cf. Hamel a. a. O. (Math. Ann.) S. 424, wo diese Gleichungen in der dynamischen Auffassung — wie in der Habilitationsschrift — als Lagrange-Eulersche bezeichnet sind. Sie wurden bereits von Volterra, Atti di Torino t. **33**, 1898 und von Woronetz, Math. Sbornik, Moskau, t. **27**, 1901 abgeleitet.

wo man die $\pi_{\sigma\nu}$ noch beliebig wählen kann, doch so, daß die Gleichungen (c) und (d) in die Form

$$\dot{\varphi}_\nu = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=6} \varkappa_{\nu\lambda} \cdot \omega_\lambda \tag{e}$$

auflösbar sind. Dies ist immer möglich, wenn die Bedingungsgleichungen (a) unabhängig sind.

Wir definieren jetzt den $\nu - \varrho$ Freiheitsgraden entsprechend die gleiche Anzahl von Komponenten der Systembeschleunigung $\mathsf{W}_{\varrho+1}, \mathsf{W}_{\varrho+2}, \ldots \mathsf{W}_6$ aus der in den Verschiebungen $\delta\vartheta_{\varrho+1}, \delta\vartheta_{\varrho+2}, \ldots \delta\vartheta_6$ identischen Gleichung

$$\sum_{\iota=\varrho+1}^{\iota=6} \mathsf{W}_\iota \,\delta\vartheta_\iota = S\mu\bar{w}\,\delta\bar{x}\,.$$

Im übrigen läuft die Rechnung gerade so wie in Nr. 190. Man erhält also

$$\mathsf{W}_\iota = \frac{d\mathsf{V}_\iota}{d\tau} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=6} \sum_{\mu=\varrho+1}^{\mu=6} \beta_{\iota\mu\varrho} \cdot \omega_\mu \mathsf{V}_\varrho - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=6} \varkappa_{\varrho\iota} \cdot \frac{\partial \mathsf{E}}{\partial \varphi_\varrho} \tag{f}$$

$$\iota = \varrho + 1, \varrho + 2, \ldots 6\,,$$

d. h. man erhält einfach die $6 - \varrho$ letzten Gleichungen von Nr. 190, in die man jetzt $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\varrho$ gleich Null setzen muß. Man hat jedoch zu beachten, daß man im allgemeinen alle Größen $\mathsf{V}_1, \mathsf{V}_2, \ldots \mathsf{V}_6$ braucht und daß man daher nicht vor Aufstellung der Gleichungen (f) die Größen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\varrho$ gleich Null setzen darf.

192. Anwendung auf die Bewegung des starren Körpers, der mit einer sphärischen Kontaktfläche auf einer Ebene rollt. Wenn ein beliebiger starrer Körper zum Teil durch eine sphärische Fläche begrenzt ist, so kann man diejenige Bewegung desselben besonders betrachten, bei welcher die Kugelfläche auf einer festen Ebene rollt. Der Mittelpunkt der Kugel sei C. Das im Körper feste Achsenkreuz (Fig. 90) wird — wie bisher — mit $C_{I,II,III}$ bezeichnet. Den Anfangspunkt O des im Raume ruhenden Achsenkreuzes $O_{1,2,3}$ legen wir mit den Achsen O_1, O_2 in die Ebene, auf welcher die Kugelfläche (Radius a) rollt.

Zur Entwicklung der kinematischen Systemvektoren müssen wir die allgemeinen Gleichungen von Nr. 163 auf

den gegenwärtigen speziellen Fall anwenden. Die Gleichung (a) dieser Nummer reduzieren sich auf

(a) $$x_3' = 0$$

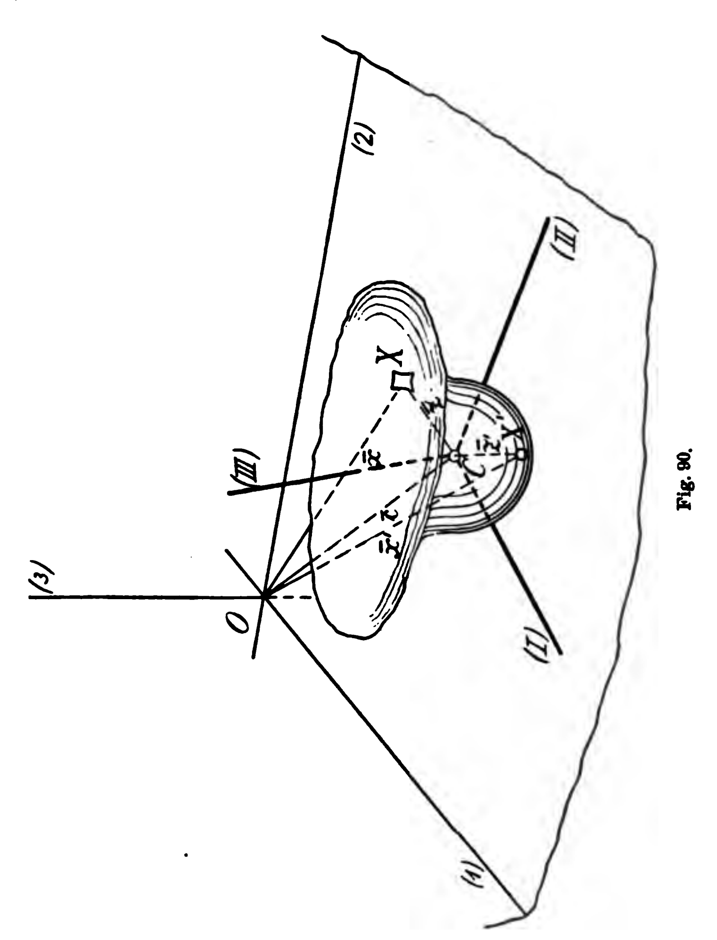


Fig. 90.

und die Gleichungen (b) werden nach Einführung der Kugelkoordinaten ψ und χ (ψ', χ' bezeichnen den Kontaktpunkt):

(b) $$z_I' = a \cos\psi' \cos\chi', \quad z_{II}' = a \cos\psi' \sin\chi', \quad z_{III}' = a \sin\psi'.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial z_I'}{\partial \psi'} = -a \sin\psi' \cos\chi', \quad \frac{\partial z_I'}{\partial \chi'} = -a \cos\psi' \sin\chi',$$

$$\frac{\partial z_{II}'}{\partial \psi'} = -a \sin\psi' \sin\chi', \quad \frac{\partial z_{II}'}{\partial \chi'} = a \cos\psi' \cos\chi',$$

$$\frac{\partial z_{III}'}{\partial \psi'} = a \cos\psi', \quad \frac{\partial z_{III}'}{\partial \chi'} = 0.$$

Dementsprechend wird

$$\frac{\partial z_{II}'}{\partial \psi'}\frac{\partial z_{III}'}{\partial \chi'} - \frac{\partial z_{II}'}{\partial \chi'}\frac{\partial z_{III}'}{\partial \psi'} = -a^2 \cos^2\psi' \cos\chi',$$

$$\frac{\partial z_{III}'}{\partial \psi'}\frac{\partial z_I'}{\partial \chi'} - \frac{\partial z_{III}'}{\partial \chi'}\frac{\partial z_I'}{\partial \psi'} = -a^2 \cos^2\psi' \sin\chi',$$

$$\frac{\partial z_I'}{\partial \psi'}\frac{\partial z_{II}'}{\partial \chi'} - \frac{\partial z_I'}{\partial \chi'}\frac{\partial z_{II}'}{\partial \psi'} = -a^2 \sin\psi' \cos\psi'.$$

Die Gleichungen (e‴) von Nr. 163 erhalten also im gegenwärtigen Falle die explizite Form

$$\text{(e)} \quad \begin{cases} (\varepsilon_{I1} \cos\chi' + \varepsilon_{II1} \sin\chi') \cos\psi' + \varepsilon_{III1} \sin\psi' = 0, \\ (\varepsilon_{I1} \cos\chi' + \varepsilon_{II2} \sin\chi') \cos\psi' + \varepsilon_{III2} \sin\psi' = 0, \end{cases}$$

welche ausdrücken, daß die Flächennormale im Kontaktpunkt X' auf der ruhenden Ebene beständig senkrecht steht.

Durch die vorstehenden Gleichungen sind die Winkel ψ', χ' durch die Größen ε d. h. durch die Eulerschen Winkel α, β, γ ausgedrückt. Es wird nämlich

$$\text{(I)} \qquad \operatorname{tg}\chi' = -\frac{\varepsilon_{III2}\,\varepsilon_{I1} - \varepsilon_{III1}\,\varepsilon_{I2}}{\varepsilon_{III2}\,\varepsilon_{II1} - \varepsilon_{III1}\,\varepsilon_{II2}}$$

und

$$\text{(II)} \qquad \operatorname{tg}\psi' = -\frac{\varepsilon_{I1} \cos\chi' + \varepsilon_{II1} \sin\chi'}{\varepsilon_{III1}}.$$

Wir wählen nun als unabhängige Positionskoordinaten die 3 Eulerschen Winkel α, β, γ und die rechtwinkligen Koordinaten des Kontaktpunktes x_1', x_2' und zerlegen die Winkelgeschwindigkeit $\overline{\omega}$ nach den im Raume festen Achsen $O_{1,2,3}$. Auf dieselben Achsen werden auch die Komponenten aller übrigen in Betracht kommenden Größen sowie die Haupt-

trägheits- und Deviationsmomente bezogen. Die Letzteren sind also nicht konstant.

Zum Rotationspunkt C haben wir den Mittelpunkt der Kugel gewählt.

Diesen Annahmen entsprechend wird nach der bisherigen Bezeichnungsweise (vgl. Fig. 90):

$$c_1 = x_1', \quad c_2 = x_2', \quad c_3 = a$$

und

$$\dot{c}_1 = \dot{x}_1', \quad \dot{c}_2 = \dot{x}_2', \quad \dot{c}_3 = 0 .$$

Nun ist die absolute Geschwindigkeit des Kontaktpunktes X' bestimmt durch die Gleichung

$$\bar{v}' = \bar{\dot{c}} + \overline{\omega(x' - c)} .$$

Da dieselbe verschwindet, so muß

$$\begin{aligned} \dot{x}_1' + \omega_2(x_3' - c_3) - \omega_3(x_2' - c_2) &= 0 , \\ \dot{x}_2' + \omega_3(x_1' - c_1) - \omega_1(x_3' - c_3) &= 0 , \\ \dot{x}_3' + \omega_1(x_2' - c_2) - \omega_2(x_1' - c_1) &= 0 \end{aligned}$$

sein, oder es müssen die Bedingungen

$$\text{(III)} \qquad \dot{x}_1' - a\,\omega_2 = 0 , \quad \dot{x}_2' + a\,\omega_1 = 0$$

erfüllt sein. Sie entsprechen den Gleichungen (d) in Nr. 188. Nach den Vorschriften in Nr. 188 setzen wir jetzt

$$\text{(IIIa)} \qquad \frac{1}{a}\cdot\dot{x}_1' - \omega_2 = \omega_4 , \quad \frac{1}{a}\cdot\dot{x}_2' + \omega_1 = \omega_5$$

und allgemein

$$\omega_\lambda = \frac{d\vartheta_\lambda}{d\tau} .$$

Es gelten also für die Differentiale und virtuellen Änderungen der ϑ die Beziehungen

$$d\vartheta_4 = \frac{1}{a}\cdot dx_1' - d\vartheta_2 , \quad d\vartheta_5 = \frac{1}{a}\cdot dx_2' + d\vartheta_1$$

und

$$\delta\vartheta_4 = \frac{1}{a}\cdot\delta x_1' - \delta\vartheta_2 , \quad \delta\vartheta_5 = \frac{1}{a}\cdot\delta x_2' + \delta\vartheta_1 .$$

Hieraus folgen sofort die Übergangsgleichungen

$$\text{(f)} \qquad \left\{ \begin{aligned} d\,\delta\vartheta_4 - \delta\,d\vartheta_4 &= \delta\,d\vartheta_2 - d\,\delta\vartheta_2 , \\ d\,\delta\vartheta_5 - \delta\,d\vartheta_5 &= d\,\delta\vartheta_1 - \delta\,d\vartheta_1 , \end{aligned} \right.$$

da
$$\delta\, d\bar{x}' = d\, \delta \bar{x}'$$
sein muß. Die Übergangsgleichungen, welche dem Rotationsvektor $\bar{\omega}$ entsprechen, haben wir in Nr. 185 nur für die im beweglichen Körper festen Achsen $C_{I,\,II,\,III}$ ausgeführt. Die entsprechenden Gleichungen für die Zerlegung nach dem Achsenkreuz $O_{1,\,2,\,3}$ lauten — wie man sich leicht durch eine der dortigen ganz analoge Rechnung überzeugt —:

$$\text{(g)} \qquad \begin{cases} d\,\delta\vartheta_1 - \delta\, d\vartheta_1 = d\vartheta_2\, \delta\vartheta_3 - d\vartheta_3\, \delta\vartheta_2\,, \\ d\,\delta\vartheta_2 - \delta\, d\vartheta_2 = d\vartheta_3\, \delta\vartheta_1 - d\vartheta_1\, \delta\vartheta_3\,, \\ d\,\delta\vartheta_3 - \delta\, d\vartheta_3 = d\vartheta_1\, \delta\vartheta_2 - d\vartheta_2\, \delta\vartheta_1\,. \end{cases}$$

Den Ausdruck für die kinetische Energie können wir aus Nr. 180 entnehmen, indem wir dort die Indizes I, II, III mit $1, 2, 3$ vertauschen und $t_1 = \dot{x}_1', \; t_2 = \dot{x}_2', \; t_3 = \dot{x}_3' = 0$ setzen. Dann erhalten wir

$$\text{(V)} \qquad \begin{cases} 2\,\mathbf{E} = \mu^*(\dot{x}_1'^2 + \dot{x}_2'^2) + 2\,\mu^*[(\dot{x}_1'\,\omega_2 - \dot{x}_2'\,\omega_1)\, z_3^* \\ \qquad + (\dot{x}_2'\, z_1^* - \dot{x}_1'\, z_2^*)\,\omega_3] + 2\,\mathbf{E}_r\,. \end{cases}$$

Hierin ist $\mathbf{E}_r$ die der Rotation um C entsprechende kinetische Energie, also

$$\begin{aligned} 2\,\mathbf{E}_r = T_1 \cdot \omega_1^2 + T_2 \cdot \omega_2^2 + T_3 \cdot \omega_3^2 - 2\,D_1 \cdot \omega_2\,\omega_3 \\ - 2\,D_2 \cdot \omega_3\,\omega_1 - 2\,D_3 \cdot \omega_1\,\omega_2\,. \end{aligned}$$

Um jetzt nach Nr. 190 Gleichung (d) die Impulskomponenten $\mathbf{V}_\iota$ auszurechnen, haben wir aus (V) die Differentialquotienten $\dfrac{\partial\,\mathbf{E}}{\partial\,\omega_\iota}$ für $\iota = 1, 2, 3, 4, 5$ zu bilden und dann nach den Vorschriften von Nr. 191 $\omega_4 = 0$ und $\omega_5 = 0$ zu setzen. Wir können also symbolisch

$$\mathbf{V}_\iota = \left(\frac{\partial\,\mathbf{E}}{\partial\,\omega_\iota}\right)_0, \quad \iota = 1, 2, 3, 4, 5$$

schreiben. Beachten wir nun unsere ursprüngliche Definition (Nr. 177) des Impulsvektors der Rotation

$$\mathbf{J}_1 = \frac{\partial\,\mathbf{E}_r}{\partial\,\omega_1}, \quad \mathbf{J}_2 = \frac{\partial\,\mathbf{E}_r}{\partial\,\omega_2}, \quad \mathbf{J}_3 = \frac{\partial\,\mathbf{E}_r}{\partial\,\omega_3},$$

so ergibt die Ausführung der angedeuteten Operationen

$$\text{(VI)} \quad \begin{cases} \mathbf{V}_1 = \mu^* a[(a + 2 z_3^*)\omega_1 - z_1^* \omega_3] + \mathbf{J}_1 \,, \\ \mathbf{V}_2 = \mu^* a[(a - 2 z_3^*)\omega_2 - z_1^* \omega_3] + \mathbf{J}_2 \,, \\ \mathbf{V}_3 = \mu^* a(a_1^* \omega_1 - z_2^* \omega_2) + \mathbf{J}_3 \,, \\ \mathbf{V}_4 = \mu^* a[(z_3^* - a)\omega_2 - z_2^* \omega_3] \,, \\ \mathbf{V}_5 = \mu^* a[z_1^* - \omega_3 - (z_3^* + a)\omega_1] \,. \end{cases}$$

Nach Gleichung (f) in Nr. 191 können wir jetzt die Komponenten $\mathbf{W}_\iota$ der Systembeschleunigung aufstellen, sobald die Koeffizienten β und $\varkappa$, welche darin vorkommen, bekannt sind. Da wir aber im vorliegenden Beispiel nicht, wie dort, Bedingungsgleichungen in der Form $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ geschrieben haben, sondern die Indizes so gewählt haben, daß $\omega_4 = 0$, $\omega_5 = 0$ wird, so sind jetzt die gesuchten Komponenten mit $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3$ zu bezeichnen.

Wir kennen die Koeffizienten β in den Übergangsgleichungen (14) Nr. 189:

$$\delta\, d\vartheta_\lambda - d\,\delta\vartheta_\lambda = \sum_{\varrho,\mu} \beta_{\varrho\mu\lambda} \cdot d\vartheta_\varrho\, d\vartheta_\mu$$

ohne weiteres, da wir sie in den Gleichungen (g) und (f) bereits explizit besitzen. Die Vergleichung ergibt

$$\beta_{321} = 1, \ \beta_{231} = -1; \ \beta_{132} = 1, \ \beta_{312} = -1; \ \beta_{213} = 1, \ \beta_{123} = -1;$$
$$\beta_{134} = 1, \quad \beta_{314} = -1; \quad \beta_{325} = 1, \quad \beta_{235} = -1.$$

Alle anderen β sind null.

Die Koeffizienten $\varkappa$, welche durch die Gleichungen (e) in Nr. 191 definiert sind, nämlich durch

$$\dot{\varphi}_\nu = \sum_\lambda \varkappa_{\nu,\lambda} \cdot \omega_\lambda$$

sind noch zu bestimmen. Wir benutzen hierzu die Gleichungen (b) in Nr. 145 für $\varphi = \alpha$, $\psi = \beta$, $\chi = \gamma$. Dann wird

$$\omega_1 = \cos\alpha \cos\beta \cdot \dot{\gamma} - \sin\alpha \cdot \dot{\beta} \,,$$
$$\omega_2 = \sin\alpha \cos\beta \cdot \dot{\gamma} + \cos\alpha \cdot \dot{\beta} \,,$$
$$\omega_3 = \dot{\alpha} - \sin\beta \cdot \dot{\gamma}$$

und hieraus folgt umgekehrt

$$\dot{\alpha} = \operatorname{tg}\beta \cos\alpha \cdot \omega_1 + \operatorname{tg}\beta \sin\alpha \cdot \omega_2 + \omega_3\,,$$

$$\dot{\beta} = \cos\alpha \cdot \omega_2 - \sin\alpha \cdot \omega_1\,,$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \cdot \omega_1 + \frac{\sin\alpha}{\cos\beta} \cdot \omega_2\,.$$

Man hat also

$$\varkappa_{11} = \operatorname{tg}\beta\cos\alpha\,, \quad \varkappa_{12} = \operatorname{tg}\beta\sin\alpha\,, \quad \varkappa_{13} = 1\,.$$

$$\varkappa_{21} = -\sin\alpha\,, \quad \varkappa_{22} = \cos\alpha\,, \quad \varkappa_{23} = 0\,,$$

$$\varkappa_{31} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\,, \quad \varkappa_{32} = \frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\,, \quad \varkappa_{33} = 0\,.$$

Ferner ist

$$\dot{x}_1' = a(\omega_4 - \omega_2)\,, \quad \dot{x}_2' = a(\omega_5 - \omega_1)$$

und infolgedessen

$$\varkappa_{42} = -a\,, \quad \varkappa_{44} = a\,; \quad \varkappa_{51} = -a\,, \quad \varkappa_{55} = a\,.$$

Alle übrigen $\varkappa$ sind null.

Nach diesen Vorbereitungen kennt man alle Koeffizienten in den Gleichungen (f) von Nr. 191 und erhält durch Einsetzung derselben für die Komponenten der Systembeschleunigung

$$\text{(VII)} \quad \begin{cases} \mathbf{W}_1 = \dfrac{d\mathbf{V}_1}{d\tau} + \omega_3(\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_4) - \omega_2\mathbf{V}_3 - \operatorname{tg}\beta\cos\alpha \cdot \dfrac{\partial \mathbf{E}_r}{\partial\alpha} \\ \qquad\qquad + \sin\alpha \cdot \dfrac{\partial \mathbf{E}_r}{\partial\beta} - \dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{E}_r}{\partial\gamma}\,, \\ \mathbf{W}_2 = \dfrac{d\mathbf{V}_2}{d\tau} - \omega_3(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_5) + \omega_1\mathbf{V}_3 - \operatorname{tg}\beta\sin\alpha \cdot \dfrac{\partial \mathbf{E}_r}{\partial\alpha} \\ \qquad\qquad - \cos\alpha \cdot \dfrac{\partial \mathbf{E}_r}{\partial\beta} - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\beta} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{E}_r}{\partial\gamma}\,, \\ \mathbf{W}_3 = \dfrac{d\mathbf{V}_3}{d\tau} + \omega_2(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_5) = \omega_1(\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_4) - \dfrac{\partial \mathbf{E}_r}{\partial\alpha}\,. \end{cases}$$

In der Dynamik werden wir diese Formeln benutzen, um die Bewegung eines schweren Körpers zu studieren, der mit einem kalottenförmig begrenzten Teile seiner Oberfläche eine horizontale Fläche berührt und ohne Gleiten um eine Gleichgewichtslage schwingt (Kugelrollpendel).

IV. Abschnitt.

Ketten aus starren Körpern.

193. Mannigfache Arten der Körperketten. Am naheliegendsten ist die Vorstellung eines Komplexes starrer Körper, die so weit voneinander gerückt sind, daß einer den andern in seiner Beweglichkeit in keiner Weise hindert. Hierhin gehört unser Planetensystem mit der Sonne, wenn wir die Annahme der Starrheit gelten lassen. Im allgemeinen braucht ein solches System nicht dauernd in dieser vollständig unabhängigen Verfassung zu bleiben. Es können zwei oder mehrere Körper zur Berührung kommen, zeitweise voneinander abgleiten oder abrollen oder sich spalten, so daß die Zahl der Elemente vermehrt wird. In allen diesen Fällen bleiben jedoch die Gesamtmasse des Systems*) $\mu^* = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu} \mu_\lambda^*$ und der Schwerpunktsvektor $(\overline{x}^0)$ definiert durch die Gleichung

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu} \mu_\lambda^* x_\lambda^* = \mu^* \cdot \overline{x}^*$$

bestimmbare Systemgrößen. Ebenso läßt sich ein Systemvektor

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu} \mathbf{S}^{(\lambda)} \mu \overline{(x - x^*) v}$$

anschaulich bilden, der die Gesamtsumme der Momente der Elementargeschwindigkeiten aller Massenpunkte, bezogen auf den Gesamtschwerpunkt $\overline{x}^*$, darstellt.

*) $\mu_1^*, \mu_2^*, \ldots \mu_\nu^*$ sind die Massen der einzelnen Körper, $\overline{x}_1^*, \overline{x}_2^*, \ldots \overline{x}_\nu^*$ die Vektoren ihrer Schwerpunkte bezogen auf einen festen Punkt O des Raumes.

Immerhin haben die freien Körpersysteme für die Kinematik ein untergeordnetes Interesse. Viel wichtiger sind hier die gebundenen Systeme. Betrachten wir als erstes Beispiel die einzelnen Steine eines aus Quadern erbauten einschichtigen Brückenbogens. Jetzt folgt vom Widerlager vorwärts gehend auf jedes Element nur ein einziges Element, so daß wir von einer einfachen Körperkette reden können. Jeder Einzelkörper wird sich auf seine beiden Nachbarn stützen, kann aber ohne vollständige Aufhebung dieser Konstellation auf Seitenflächen der benachbarten Steine gleiten und ohne die Gleitbewegung aufzugeben auch eine Drehung erfahren, insbesondere kann er um eine seiner Kanten eine Kippbewegung ausführen. Alle diese Bewegungen können in solchen Grenzen bleiben, daß der Zusammenhang des Systems trotz der Änderung nicht ganz aufgehoben wird, wie dies nach dem Einsturz des Bogens der Fall ist.

Wir erhalten ein weit einfacheres Bild einer Körperkette, wenn wir uns vorstellen, daß jedes Element (Einzelkörper) an zwei beliebigen Stellen geradlinig durchbohrt sei. Durch passende Ausschälungen können wir nun die Glieder durch Zapfen derartig aneinander fügen, daß jedes Element um eine im vorangehenden feste Achse drehbar wird und selbst die Achse für das folgende Element besitzt. So entsteht die einfache Zylindergelenkkette, die im Maschinenbau die mannigfachsten Anwendungen gefunden hat. Man könnte auch eins oder mehrere der Gelenke mit drei Achsen versehen und damit die Möglichkeit schaffen, eine neue einfache Gelenkkette von diesem abzuzweigen. Man sieht sofort, wie diese Anschauung zu Gelenknetzen führt, die entweder flächenhaft oder räumlich ausgebildet sein können. Aber selbst die Annahme der Zylindergelenkverbindung kann man durch eine — wenigstens scheinbar — allgemeinere ersetzen, indem man statt der Zapfen Kugelgelenke wählt. Endlich lassen sich, ohne aus dem Bewegungsgebiet des starren Körpers herauszutreten, zwangsweise geführte Translationen des einen Elementes gegen das andere durch bajonettartig ausgeführte Röhrengleitverbindungen hinzunehmen. In allen diesen Fällen hat die methodische Kinematik Systemgrößen für die Impulsion (Geschwindigkeitszustand) und die Beschleunigung aufzustellen, die als Erweiterung der bisher betrachteten Systemgrößen anzusehen sind.

194. Zwei starre Körper sind durch ein Kugelgelenk verbunden — Impulsvektoren. In dem ersten Körper (K_1) nehmen wir einen beliebigen Rotationspunkt C_1 und den Mittelpunkt des Kugelgelenkes in C_2 an. C_2 ist dann auch ein Punkt des zweiten Körpers (K_2). Jetzt ist mit Anwendung einer selbstverständlichen Indexbezeichnung (Fig. 91)

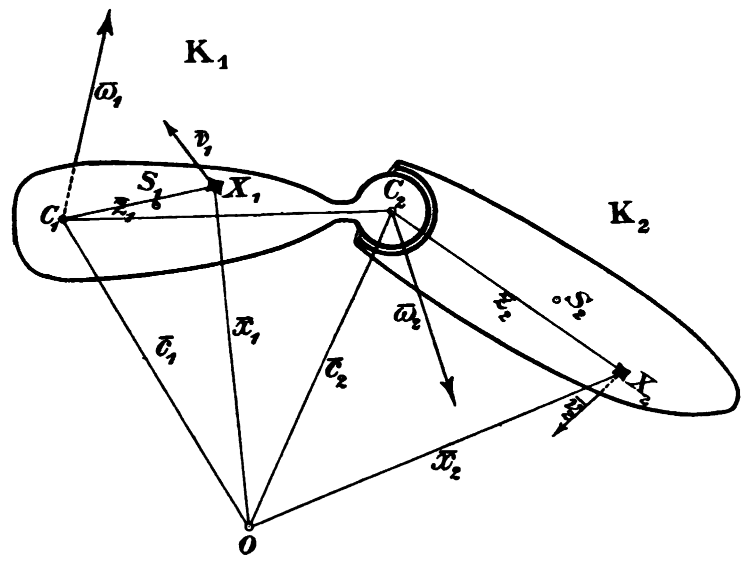


Fig. 91.

zur Unterscheidung der beiden Elemente der Kugelgelenkkette die Geschwindigkeit von X_1:

$$\text{(1)} \qquad \frac{d\bar{x}_1}{d\tau} = \bar{v}_1 = \frac{d\bar{c}_1}{d\tau} + \overline{\omega_1(x_1 - c_1)}\,,$$

also auch

$$\frac{d\bar{c}_2}{d\tau} = \frac{d\bar{c}_1}{d\tau} + \overline{\omega_1(c_2 - c_1)}\,.$$

Nun ist aber ganz analog für einen Punkt von K_2

$$\frac{d\bar{x}_2}{d\tau} = \frac{d\bar{c}_2}{d\tau} + \overline{\omega_2(x_2 - c_2)}$$

oder

(2) $$\frac{d\bar{x}_2}{d\tau} = \bar{v}_2 = \frac{d\bar{c}_1}{d\tau} + \overline{\omega_1(c_2 - c_1)} + \overline{\omega_2(x_2 - c_2)}\,.$$

Den Gleichungen (1) und (2) entsprechend ist auch

$$\delta\bar{x}_1 = \delta\bar{c}_1 + \overline{\delta\vartheta_1(x_1 - c_1)}$$

$$\delta\bar{x}_2 = \delta\bar{c}_1 + \overline{\delta\vartheta_1(c_2 - c_1)} + \overline{\delta\vartheta_2(x_2 - c_2)}\,.$$

Wir definieren jetzt die Impulsvektoren $\bar{\mathfrak{p}}, \bar{\mathfrak{V}}^{(1)}, \bar{\mathfrak{V}}^{(2)}$ ganz analog wie früher (Nr. 176) beim einzelnen starren Körper, indem wir setzen:

$$S\mu_1 \cdot \bar{v}_1\,\delta\bar{x}_1 + S\mu_2\,\bar{v}_2\,\delta\bar{x}_2 = \bar{\mathfrak{p}} \cdot \delta\bar{c}_1 + \bar{\mathfrak{V}}^{(1)}\delta\bar{\vartheta}_1 + \bar{\mathfrak{V}}^{(2)}\,\delta\bar{\vartheta}_2\,.$$

Dann folgt sofort

(a) $$\bar{\mathfrak{p}} \quad = S\mu_1\,\bar{v}_1 + S\mu_2\,\bar{v}_2$$

(b) $$\bar{\mathfrak{V}}^{(1)} = S\mu_1\,\overline{(x_1 - c_1)\,v_1} + S\mu_2\,\overline{(c_2 - c_1)\,v_2}$$

(c) $$\bar{\mathfrak{V}}^{(2)} = S\mu_2\,\overline{(x_2 - c_2)\,v_2}\,.$$

Nun ist aber

$$S\mu_1\,\bar{x}_1 + S\mu_2\,\bar{x}_2 = \mu^* \cdot \bar{x}^*\,,$$

wo $\bar{x}^*$ den Schwerpunkt (S^*) der zweigliedrigen Kette bestimmt. Die Gleichung (a) läßt sich also durch die folgende ersetzen

(a′) $$\bar{\mathfrak{p}} = \mu^* \cdot \bar{v}^*\,,$$

wenn $\bar{v}^*$ der Vektor der Geschwindigkeit des gemeinsamen Schwerpunktes des Systems ist, während die Gleichung (b) übergeht in

(b′) $$\bar{\mathfrak{V}}^{(1)} = \mu_2^*\,\overline{(c_2 - c_1)\,v_2^*} + S\mu_1\,\overline{(x_1 - c_1)\,v_1}\,,$$

wo $\bar{v}_2^*$ die Geschwindigkeit des Schwerpunktes (S_2) von K_2 bedeutet. Für eine zweigliedrige Kette mit Kugelgelenk existieren also drei Impulsvektoren. Einer bezieht sich auf die Translation und ist gleich der Geschwindigkeit des Gesamtschwerpunktes multipliziert mit der Masse des Systems. Der erste Impulsvektor der Rotation setzt sich geometrisch zusammen aus dem Eulerschen Impulsvektor des ersten Körpers und aus dem Moment der Schwerpunktsgeschwindigkeit des zweiten Körpers bezogen auf den Rotationspunkt des ersten Körpers. Der zweite Impulsvektor der Rotation ist gleich dem Eulerschen Impulsvektor des zweiten Körpers.

Man kann die Impulsvektoren für das gegliederte System noch etwas übersichtlicher darstellen, wenn man setzt

$$\bar{\mathfrak{p}}_1 = S\mu_1 \bar{v}_1 , \qquad \bar{\mathfrak{p}}_2 = S\mu_2 \bar{v}_2$$
$$\bar{\mathfrak{V}}_1 = S\mu_1 \overline{(x_1 - c_1) v_1} , \quad \bar{\mathfrak{V}}_2 = S\mu_2 \overline{(x_2 - c_2) v_2}$$

und demnach die Gleichungen (a), (b), (c) in der folgenden Form schreibt:

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{cases} \bar{\mathfrak{p}} = \bar{\mathfrak{p}}_1 + \bar{\mathfrak{p}}_2 , \\ \bar{\mathfrak{V}}^{(1)} = \bar{\mathfrak{V}}_1 + \mu_2^* \cdot \overline{(c_2 - c_1) v_2^*} = \bar{\mathfrak{V}}_1 + \overline{e_1 \mathfrak{p}_2} , \\ \bar{\mathfrak{V}}^{(2)} = \bar{\mathfrak{V}}_2 . \end{cases}$$

Die Vektorpaare $(\bar{\mathfrak{p}}_1, \bar{\mathfrak{V}}_1)$, $(\bar{\mathfrak{p}}_2, \bar{\mathfrak{V}}_2)$ sind jetzt auf die einzelnen Glieder K_1 und K_2 bezogen und identisch mit in Nr. 176 betrachteten Eulerschen Impulsvektoren für den freien starren Körper. Wir können also jetzt die dort entwickelten Formeln unmittelbar anwenden und erhalten, wegen der Beziehung

$$\frac{d\bar{c}_2}{d\tau} = \frac{d\bar{c}_1}{d\tau} + \overline{\omega_1 (c_2 - c_1)} = \bar{t}_1 + \overline{\omega_1 e_1} ,$$

$$\bar{\mathfrak{p}}_1 = \mu_1^* (\bar{t}_1 + \overline{\omega_1 z_1^*}) , \quad \bar{\mathfrak{p}}_2 = \mu_2^* (\bar{t}_1 + \overline{\omega_2 z_2^*} + \overline{\omega_1 e_1}) ,$$

$$\bar{\mathfrak{V}}_1 = \mu_1^* \cdot \overline{z_1^* t_1} + \bar{\mathfrak{J}}_1 , \quad \bar{\mathfrak{V}}_2 = \mu_2^* \cdot \overline{z_2^* t_1} + \bar{\mathfrak{J}}_2 + \mu_2^* \cdot \overline{z_2^* (\omega_1 e_1)} .$$

Dazu kommt noch die Beziehung

$$\bar{v}_2^* = \bar{t}_1 + \overline{\omega_1 e_1} + \overline{\omega_2 z_2^*} .$$

Nach diesen Substitutionen treten an die Stelle der Gleichungen (A) die folgenden expliziten Formen:

$$(\mathrm{A}') \quad \begin{cases} \bar{\mathfrak{p}} = \mu^* \cdot \bar{t}_1 + \mu_1^* \cdot \overline{\omega_1 z_1^*} + \mu_2^* \cdot \overline{\omega_2 z_2^*} + \mu_2^* \cdot \overline{\omega_1 e_1} , \\ \bar{\mathfrak{V}}^{(1)} = \mu_1^* \cdot \overline{z_1^* t_1} + \bar{\mathfrak{J}}_1 + \mu_2^* [\overline{e_1 t_1} + \overline{e_1 (\omega_1 e_1)} + \overline{e_1 (\omega_2 z_2^*)}] , \\ \bar{\mathfrak{V}}^{(2)} = \mu_2^* \cdot \overline{z_2^* t_1} + \bar{\mathfrak{J}}_2 + \mu_2^* \cdot \overline{z_2^* (\omega_1 e_1)} . \end{cases}$$

Hierin sind die Vektoren $\bar{e}_1, \bar{z}_1^*, \bar{z}_2^*$ in den betreffenden Gliedern festliegende Größen.

Für die Zerlegung der Vektoren in Komponenten müssen wir drei rechtwinklige Achsensysteme ins Auge fassen, nämlich

erstens das im Raume ruhende Achsenkreuz $O_{1,2,3}$, auf welches die absolute Bewegung bezogen wird,

zweitens ein im Körper K_1 festliegendes Achsenkreuz mit dem Anfangspunkt in C_1 und Achsenrichtungen, welche gegen $O_{1,2,3}$ durch die Eulerschen Positionswinkel φ_1, ψ_1, χ_1 (Nr. 114) orientiert sind,

drittens ein im Körper K_2 festes Achsenkreuz, das ebenso durch die Eulerschen Winkel φ_2, ψ_2, χ_2 gegen $O_{1,2,3}$ orientiert ist und seinen Anfangspunkt in C_2 hat.

Auf jedem dieser drei Achsenkreuze nehmen wir ein Tripel von Einheitsvektoren an. Sie seien der Reihe nach

$$\begin{array}{lll} \bar{\varepsilon}_1, & \bar{\varepsilon}_2, & \bar{\varepsilon}_3 \\ \bar{\varepsilon}_I, & \bar{\varepsilon}_{II}, & \bar{\varepsilon}_{III} \\ \bar{\varepsilon}_{I'}, & \bar{\varepsilon}_{II'}, & \bar{\varepsilon}_{III'}. \end{array}$$

Nach Nr. 114 ist

$$\text{(d)} \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{\varepsilon}_I &= \cos\psi_1 \cos\varphi_1 \cdot \bar{\varepsilon}_1 + \cos\psi_1 \sin\varphi_1 \cdot \bar{\varepsilon}_2 - \sin\psi_1 \cdot \bar{\varepsilon}_3 \\ \bar{\varepsilon}_{II} &= (-\cos\chi_1 \sin\varphi_1 + \sin\chi_1 \cos\varphi_1 \sin\psi_1) \cdot \bar{\varepsilon}_1 \\ &\quad + (\cos\chi_1 \cos\varphi_1 + \sin\chi_1 \sin\varphi_1 \sin\psi_1)\, \bar{\varepsilon}_2 + \sin\chi_1 \cos\psi_1 \cdot \bar{\varepsilon}_3 \\ \bar{\varepsilon}_{III} &= (\sin\chi_1 \sin\varphi_1 + \cos\chi_1 \cos\varphi_1 \sin\psi_1)\, \bar{\varepsilon}_1 \\ &\quad + (-\sin\chi_1 \cos\varphi_1 + \cos\chi_1 \sin\varphi_1 \sin\psi_1)\, \bar{\varepsilon}_2 + \cos\chi_1 \cos\psi_1 \cdot \bar{\varepsilon}_3 \end{aligned} \right.$$

und die Ausdrücke für $\bar{\varepsilon}_{I'}$, $\bar{\varepsilon}_{II'}$, $\bar{\varepsilon}_{III'}$ sind ganz dieselben, wenn wir nur an φ, ψ, χ den Index 1 mit 2 vertauschen.

Bezeichnen wir jetzt die Komponenten eines Vektors, indem wir die Indizes der in Betracht kommenden drei Einheitvektoren ε hinter dem ihm schon anhaftenden Körperindex (1 oder 2) setzen, so erhalten wir der Reihe nach

$$\text{(e)} \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{\omega}_1 &= \omega_{1I} \cdot \bar{\varepsilon}_I + \omega_{1II} \cdot \bar{\varepsilon}_{II} + \omega_{1III} \cdot \bar{\varepsilon}_{III}, \\ \bar{\omega}_2 &= \omega_{2I'} \cdot \bar{\varepsilon}_{I'} + \omega_{2II'} \cdot \bar{\varepsilon}_{II'} + \omega_{2III'} \cdot \bar{\varepsilon}_{III'}, \end{aligned} \right.$$

$$\text{(f)} \quad \bar{e}_1 = e_{1I} \cdot \bar{\varepsilon}_I + e_{1II} \cdot \bar{\varepsilon}_{II} + e_{1III} \cdot \bar{\varepsilon}_{III},$$

$$\text{(g)} \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{\mathfrak{s}}_1^* &= \mathfrak{s}_{1I}^* \cdot \bar{\varepsilon}_I + \mathfrak{s}_{1II}^* \cdot \bar{\varepsilon}_{II} + \mathfrak{s}_{1III}^* \cdot \bar{\varepsilon}_{III}, \\ \bar{\mathfrak{s}}_2^* &= \mathfrak{s}_{2I'}^* \cdot \bar{\varepsilon}_{I'} + \mathfrak{s}_{2II'}^* \cdot \bar{\varepsilon}_{II'} + \mathfrak{s}_{2III'}^* \cdot \bar{\varepsilon}_{III'}, \end{aligned} \right.$$

$$\text{(h)} \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{\mathbf{J}}_1 &= \mathbf{J}_{1I} \cdot \bar{\varepsilon}_I + \mathbf{J}_{1II} \cdot \bar{\varepsilon}_{II} + \mathbf{J}_{1III} \cdot \bar{\varepsilon}_{III}, \\ \bar{\mathbf{J}}_2 &= \mathbf{J}_{2I'} \cdot \bar{\varepsilon}_{I'} + \mathbf{J}_{2II'} \cdot \bar{\varepsilon}_{II'} + \mathbf{J}_{2III'} \cdot \bar{\varepsilon}_{III'}. \end{aligned} \right.$$

Hierin sind die Komponenten e_{1I}, e_{1II}, e_{1III}, $\mathfrak{s}_{1I}^*$, $\mathfrak{s}_{1II}^*$, $\mathfrak{s}_{2II}^*$, $\mathfrak{s}_{2I'}^*$, $\mathfrak{s}_{2II'}^*$, $\mathfrak{s}_{2III'}^*$ konstante Größen, die nur von der Lage

der Rotationspunkte C_1, C_2 und der Massenverteilung in K_1 und K_2 abhängen. Ferner sind die Komponenten von $\bar{\mathfrak{J}}_1$ und $\bar{\mathfrak{J}}_2$ in bekannter Weise (Nr. 180) durch die Komponenten der Winkelgeschwindigkeiten $\bar{\omega}_1$ und $\bar{\omega}_2$ linear mit konstanten Koeffizienten ausdrückbar. Denn in den Relationen

$$\text{(i)}\quad \begin{cases} \mathfrak{J}_{1I} = T_{1I}\cdot\omega_{1I} - D_{1III}\cdot\omega_{1II} - D_{1II}\cdot\omega_{1III}\,, \\ \mathfrak{J}_{1II} = T_{1II}\cdot\omega_{1II} - D_{1I}\cdot\omega_{1III} - D_{1III}\cdot\omega_{1I}\,, \\ \mathfrak{J}_{1III} = T_{1III}\cdot\omega_{1III} - D_{1II}\cdot\omega_{1I} - D_{1I}\cdot\omega_{1II}\,, \end{cases}$$

$$\text{(k)}\quad \begin{cases} \mathfrak{J}_{2I'} = T_{2I'}\cdot\omega_{2I'} - D_{2III'}\cdot\omega_{2II'} - D_{2II'}\cdot\omega_{2III'}\,, \\ \mathfrak{J}_{2II'} = T_{2II'}\cdot\omega_{2II'} - D_{2I'}\cdot\omega_{2III'} - D_{2III'}\cdot\omega_{2I'}\,, \\ \mathfrak{J}_{2III'} = T_{2III'}\cdot\omega_{2III'} - D_{2II'}\cdot\omega_{2I'} - D_{2I'}\cdot\omega_{2II'} \end{cases}$$

sind die Trägheitsmomente und Deviationsmomente (T und D) unveränderliche Größen, weil sie auf die Körperachsen bezogen auftreten.

Endlich sind noch die Komponenten der Winkelgeschwindigkeiten $\bar{\omega}_1$ und $\bar{\omega}_2$ nach Nr. 145 durch die Eulerschen Winkel und ihre Zeitderivierten ausdrückbar.

Alle in den Gleichungen (A') auf den rechten Seiten vorkommenden Systemvektoren sind jetzt in Komponenten nach dem ruhenden Achsenkreuz $O_{1,2,3}$ zerlegt, wenn man noch die Gleichung

$$\bar{t}_1 = t_{11}\cdot\bar{\varepsilon}_1 + t_{12}\cdot\bar{\varepsilon}_2 + t_{13}\cdot\bar{\varepsilon}_3$$

beachtet, und man sieht, in welcher Weise die Impulsion des Systems durch die neun Größen

$$\begin{matrix} c_{11}, & c_{12}, & c_{13}, \\ \varphi_1, & \psi_1, & \chi_1, \\ \varphi_2, & \psi_2, & \chi_2 \end{matrix}$$

und ihre Zeitderivierten explizit dargestellt werden kann.

Die Zerlegung wird noch etwas einfacher und für manche Zwecke brauchbarer, wenn man alle Vektoren auf K_1 bezieht. In diesem Falle ist

$$\bar{t}_1 = t_{1I}\cdot\bar{\varepsilon}_I + t_{1II}\cdot\bar{\varepsilon}_{II} + t_{1III}\cdot\bar{\varepsilon}_{III}$$

zu setzen. Man erhält jetzt die Impulsvektoren in der Form:

$$\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_I \cdot \bar{\varepsilon}_I + \mathfrak{p}_{II} \cdot \bar{\varepsilon}_{II} + \mathfrak{p}_{III} \cdot \bar{\varepsilon}_{III},$$

$$\bar{\mathfrak{V}}^{(1)} = \mathfrak{V}_I^{(1)} \cdot \bar{\varepsilon}_I + \mathfrak{V}_{II}^{(1)} \cdot \bar{\varepsilon}_{II} + \mathfrak{V}_{III}^{(1)} \cdot \bar{\varepsilon}_{III},$$

$$\bar{\mathfrak{V}}^{(2)} = \mathfrak{V}_I^{(2)} \cdot \bar{\varepsilon}_I + \mathfrak{V}_{II}^{(2)} \cdot \bar{\varepsilon}_{II} + \mathfrak{V}_{III}^{(2)} \cdot \bar{\varepsilon}_{III}.$$

Der Leser kann im Bedarfsfalle die Rechnung ohne jede Schwierigkeit ausführen.

195. Beschleunigungsvektoren für dasselbe System. Die drei Vektoren der Systembeschleunigung $\bar{\mathfrak{q}}$, $\overline{\mathfrak{W}^{(1)}}$, $\overline{\mathfrak{W}^{(2)}}$ sind definiert durch die Gleichung:

$$S\mu_1 \cdot \bar{w}_1\, \delta\bar{x}_1 + S\mu_2 \cdot \bar{w}_2\, \delta\bar{x}_2 = \bar{\mathfrak{q}} \cdot \delta\bar{c}_1 + \overline{\mathfrak{W}^{(1)}} \cdot \delta\bar{\vartheta}_1 + \overline{\mathfrak{W}^{(2)}} \cdot \delta\bar{\vartheta}_2,$$

so daß

$$\bar{\mathfrak{q}} = S\mu_1 \bar{w}_1 + S\mu_2 \bar{w}_2 \tag{1}$$

$$\overline{\mathfrak{W}^{(1)}} = S\mu_1 \overline{(x_1 - c_1)\, w_1} + S\mu_2 \overline{(c_2 - c_1)\, w_2} \tag{2}$$

$$\overline{\mathfrak{W}^{(2)}} = S\mu_2 \overline{(x_2 + c_2)\, w_2} \tag{3}$$

wird, die man auch sofort aus den Gleichungen (a), (b), (c) in Nr. 194 durch Vertauschung von $\bar{v}$ mit $\bar{w}$ hätte gewinnen können. Wir differentiieren jetzt die Impulsgleichungen (a), (b), (c) total nach der Zeit und vergleichen sie mit den vorstehenden Gleichungen (1), (2), (3), dann ergeben sich für die Vektoren der Systembeschleunigung die Ausdrücke:

$$\bar{\mathfrak{q}} = \frac{d\bar{\mathfrak{p}}}{d\tau}, \tag{1'}$$

$$\overline{\mathfrak{W}^{(1)}} = \frac{d\bar{\mathfrak{V}}^{(1)}}{d\tau} + \overline{t_1\, \mathfrak{p}_1} + \overline{e_1 \frac{d\mathfrak{p}_2}{d\tau}}, \tag{2'}$$

$$\overline{\mathfrak{W}^{(2)}} = \frac{d\bar{\mathfrak{V}}^{(2)}}{d\tau} + \overline{t_1\, \mathfrak{p}_2} + \overline{(\omega_1 e_1)\, \mathfrak{p}_2}, \tag{3'}$$

welche den Zusammenhang des Beschleunigungsprozesses mit der Impulsion in der übersichtlichsten Weise darstellen (man vergleiche Nr. 179). Die Untersuchung der beschleunigungsfreien ($\bar{\mathfrak{q}} = 0$, $\overline{\mathfrak{W}^{(1)}} = 0$, $\overline{\mathfrak{W}^{(2)}} = 0$) Bewegung des betrachteten zweigliedrigen Systems scheint noch nicht in Angriff genommen zu sein. Es ist aber wahrscheinlich, daß dieselbe interessante Resultate liefern wird.

196. Reduktion der Elementarvektoren bei beliebig vielen Gliedern mit Kugelgelenken. Wir lassen jetzt die Beschränkung auf zwei starre Elemente fallen, behalten aber die bisher gebrauchte Bezeichnungsweise bei. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\text{für die Punkte von } K_1\text{:} \quad \delta\bar{x}_1 = \delta\bar{c}_1 + \overline{\delta\vartheta_1(x_1 - c_1)} \\
&\text{für die Punkte von } K_2\text{:} \quad \delta\bar{x}_2 = \delta\bar{c}_2 + \overline{\delta\vartheta_2(x_2 - c_2)} \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\text{für die Punkte von } K_\nu\text{:} \quad \delta\bar{x}_\nu = \delta\bar{c}_\nu + \overline{\delta\vartheta_\nu(x_\nu - c_\nu)}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\delta\bar{c}_2 &= \delta\bar{c}_1 + \overline{\delta\vartheta_1(c_2 - c_1)} \\
\delta\bar{c}_3 &= \delta\bar{c}_2 + \overline{\delta\vartheta_2(c_3 - c_2)} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\delta\bar{c}_\nu &= \delta\bar{c}_{\nu-1} + \overline{\delta\vartheta_{\nu-1}(c_\nu - c_{\nu-1})}\,,
\end{aligned}$$

also

$$\delta\bar{c}_\lambda = \delta\bar{c}_1 + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\lambda-1} \overline{\delta\vartheta_\varrho(c_{\varrho+1} - c_\varrho)}\,.$$

Nun ist für ein ganz beliebiges System von Elementarvektoren $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots \overline{u}_\nu$, die bzw. den Körpern $K_1, K_2, \ldots K_\nu$ angehören, der Ansatz der virtuellen Arbeiten ohne Rücksicht auf die spezielle Verbindung der Glieder:

$$\begin{aligned}
&S^{(1)}\overline{u}_1 \cdot \delta\bar{x}_1 + S^{(2)}\overline{u}_2 \cdot \delta\bar{x}_2 + \ldots + S^{(\nu)}\overline{u}_\nu \cdot \delta\bar{x}_\nu \\
&= \delta\bar{c}_1 \cdot S^{(1)}\overline{u}_1 + \delta\bar{c}_2 \cdot S^{(2)}\overline{u}_2 + \ldots + \delta\bar{c}_\nu \cdot S^{(\nu)}\overline{u}_\nu \\
&+ \delta\overline{\vartheta}_1 \cdot S^{(1)}\overline{(x_1 - c_1)\,u_1} + \delta\overline{\vartheta}_2 \cdot S^{(2)}\overline{(x_2 - c_2)\,u_2} \\
&+ \ldots + \delta\overline{\vartheta}_\nu \cdot S^{(\nu)}\overline{(x_\nu - c_\nu)\,u_\nu}\,.
\end{aligned}$$

Setzen wir also zur Abkürzung

$$S^{(\lambda)}\overline{u}_\lambda = \overline{\mathfrak{r}}_\lambda\,, \quad S^{(\lambda)}\overline{(x_\lambda - c_\lambda)\,u_\lambda} = \overline{\mathfrak{M}}_\lambda\,,$$

dann wird die ganze virtuelle Arbeit der Vektoren $\overline{u}$ am zunächst unverbunden vorgestellten System gleich

$$\overline{\mathfrak{r}}_1 \cdot \delta\bar{c}_1 + \overline{\mathfrak{r}}_2 \cdot \delta\bar{c}_2 + \ldots + \overline{\mathfrak{r}}_\nu \cdot \delta\bar{c}_\nu + \overline{\mathfrak{M}}_1 \cdot \delta\overline{\vartheta}_1 + \overline{\mathfrak{M}}_2 \cdot \delta\overline{\vartheta}_2 + \ldots + \overline{\mathfrak{M}}_\nu \cdot \delta\overline{\vartheta}_\nu\,.$$

Berücksichtigen wir jedoch die Verbindung durch Kugelgelenke, so ist in diesem Ausdrucke

$$\delta\bar{c}_\lambda = \delta\bar{c}_1 + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\lambda-1} \overline{\delta\vartheta_\varrho(c_{\varrho+1} - c_\varrho)} = \delta\bar{c}_1 + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\lambda-1} \overline{\delta\vartheta_\varrho\, e_\varrho}$$

zu setzen. Man erhält also die virtuelle Arbeit der Vektoren $\bar{u}$ für die Gelenkkette in der einfachen Form:

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{r}}\cdot\delta\bar{c}_1 &+ [\overline{\mathsf{M}}_1 + \overline{e_1(\mathfrak{r}_2+\mathfrak{r}_3+\dots+\mathfrak{r}_\nu)}]\cdot\delta\bar{\vartheta}_1\\ &+ [\overline{\mathsf{M}}_2 + \overline{e_2(\mathfrak{r}_3+\mathfrak{r}_4+\dots+\mathfrak{r}_\nu)}]\cdot\delta\bar{\vartheta}_2\\ &+\dots\dots\dots\dots\dots\\ &+ [\overline{\mathsf{M}}_{\nu-1} + \overline{e_{\nu-1}\mathfrak{r}_\nu}]\cdot\delta\bar{\vartheta}_{\nu-1} + \overline{\mathsf{M}}_\nu\cdot\delta\bar{\vartheta}_\nu\,.\end{aligned}$$

Hierin ist zur Abkürzung $\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu}\bar{\mathfrak{r}}_\lambda = \bar{\mathfrak{r}}$ gesetzt. Der Reduktionsgleichung

$$\text{(I)}\qquad \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu}[S^{(\lambda)}\,\bar{u}_\lambda\,\delta\bar{x}_\lambda] = \bar{\mathfrak{r}}\cdot\delta c_1 + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu}\overline{\mathsf{R}}^{(\lambda)}\cdot\delta\bar{\vartheta}_\lambda$$

entsprechen demnach die Systemvektoren

$$\overline{\mathsf{R}}^{(\lambda)} = \overline{\mathsf{M}}_\lambda + \overline{e_\lambda(\mathfrak{r}_{\lambda+1}+\mathfrak{r}_{\lambda+2}+\dots+\mathfrak{r}_\nu)}\,.$$

Für $\bar{u}_\lambda = \mu_\lambda\cdot\bar{v}_\lambda$ resp. $\bar{u}_\lambda = \mu_\lambda\cdot\bar{w}_\lambda$ folgen hieraus sofort die Vektoren der Geschwindigkeit (Impulsion) und der Beschleunigung in bezug auf die ν-gliedrige Kugelgelenkkette, nämlich

$$\text{(A)}\qquad\left\{\begin{aligned}\bar{\mathfrak{p}} &= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu}\bar{\mathfrak{p}}_\lambda\,,\\ \overline{\mathsf{V}}^{(\lambda)} &= \overline{\mathsf{V}}_\lambda + \overline{e_\lambda(\mathfrak{p}_{\lambda+1}+\mathfrak{p}_{\lambda+2}+\dots+\mathfrak{p}_\nu)}\end{aligned}\right.$$

und

$$\text{(B)}\qquad\left\{\begin{aligned}\bar{\mathfrak{q}} &= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu}\bar{\mathfrak{q}}_\lambda\,,\\ \overline{\mathsf{W}}^{(\lambda)} &= \overline{\mathsf{W}}_\lambda + \overline{e_\lambda(\mathfrak{q}_{\lambda+1}+\mathfrak{q}_{\lambda+2}+\dots+\mathfrak{q}_\nu)}\,.\end{aligned}\right.$$

In den letzten Formeln ist nach Nr. 179, Gleichung (I) noch

$$\text{(a)}\qquad \bar{\mathfrak{q}}_\lambda = \frac{d\bar{\mathfrak{p}}_\lambda}{d\tau}\,,\quad \overline{\mathsf{W}}_\lambda = \frac{d\overline{\mathsf{V}}_\lambda}{d\tau} + \overline{t_\lambda\,\mathfrak{p}_\lambda}$$

zu setzen und zu beachten, daß in unserem Falle

$$\text{(b)}\qquad \bar{t}_\lambda = \bar{t}_1 + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\lambda-1}\overline{\omega_\varrho\,e_\varrho}$$

wird. Die beschleunigungsfreie Bewegung ist — wie immer — durch die Unveränderlichkeit der kinetischen

Energie $\mathbf{E} = \frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu} S^{(\lambda)} \mu_\lambda v_\lambda^2$ ausgezeichnet. Man erkennt dies sofort aus der Beziehung

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu} S^{(\lambda)} \mu_\lambda \overline{w}_\lambda \frac{d\overline{x}_\lambda}{d\tau} = \overline{\mathfrak{q}} \frac{d\overline{c}_1}{d\tau} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu} \overline{\mathbf{W}}^{(\lambda)} \overline{\omega}_\lambda = \frac{d\mathbf{E}}{d\tau},$$

da mit dem Verschwinden der Vektoren $\overline{\mathfrak{q}}, \overline{\mathbf{W}}^{(1)}, \overline{\mathbf{W}}^{(2)}, \ldots \overline{\mathbf{W}}^{(\nu)}$

$$\frac{d\mathbf{E}}{d\tau} = 0$$

wird.

197. Die ebene Körperkette. Während die Kinematik der räumlichen Gelenk- und Stützsysteme ungeachtet ihrer großen Bedeutung für die angewandte Mechanik keine nennenswerte Bearbeitung*) erfahren hat, sind dieselben in den letzten Jahren eingehend von Otto Fischer**) behandelt worden. Die Theorie der ebenen Ketten ist wegen der parallelen Gelenkachsen sehr einfach, so daß sich ihre späte Entwicklung nur durch den Mangel einer äußeren Anregung erklären läßt.

Zunächst kann man die Vektoren $\overline{e}_\varrho$ (Fig. 92) festlegen durch die Winkel ϑ_ϱ, welche sie mit der Achse $\overline{\varepsilon}_1$ eines ebenen rechtwinkligen Achsenkreuzes bilden. Dann ist

$$\overline{e}_\varrho = (\cos\vartheta_\varrho \cdot \overline{\varepsilon}_1 + \sin\vartheta_\varrho \cdot \overline{\varepsilon}_2)\, e_\varrho \,.$$

Ganz analog lassen sich die Schwerpunktsvektoren $\overline{C_\lambda S_\lambda} = \overline{s}_\lambda^*$ darstellen, indem man

$$\overline{s}_\lambda^* = [\cos(\vartheta_\lambda + \alpha_\lambda) \cdot \overline{\varepsilon}_1 + \sin(\vartheta_\lambda + \alpha_\lambda) \cdot \overline{\varepsilon}_2]\, s_\lambda^*$$

setzt. Endlich wird

$$\overline{\omega}_\lambda = \omega_\lambda \cdot \overline{\varepsilon}_3 = \frac{d\vartheta_\lambda}{d\tau} \overline{\varepsilon}_3 \,.$$

Hiermit ist jetzt der Vektor

$$\overline{\mathfrak{p}}_\lambda = \mu_\lambda^* (\overline{t}_\lambda + \overline{\omega_\lambda s_\lambda^*})$$

---

*) Interessante geometrische Eigenschaften dieser Systeme sind in Koenigs Cinématique, S. 291—307, Paris 1897, behandelt.

) Otto Fischer, *Über die reduzierten Systeme und die Hauptpunkte der Glieder eines Gelenkmechanismus und ihre Bedeutung für die technische Mechanik.* Ztschr. f. Math. u. Phys., Bd. **47. 1902.

Otto Fischer, *Der Gang des Menschen.* V. Teil. Abhandl. der Sächsischen Ges. d. Wiss. (Math. Phys. Klasse), Bd. **28**. 1903.

Otto Fischer, *Über die Bewegungsgleichungen räumlicher Gelenksysteme,* ib. Bd. **29**. 1905.

zu bilden. Man erhält

$$\overline{\omega_\varrho\, e_\varrho} = (\cos\vartheta_\varrho \cdot \bar{\varepsilon}_2 - \sin\vartheta_\varrho \cdot \bar{\varepsilon}_1)\, e_\varrho\, \omega_\varrho$$

und

$$\overline{\omega_\lambda\, \mathfrak{s}_\lambda^*} = [\cos(\vartheta_\lambda + \alpha_\lambda) \cdot \bar{\varepsilon}_2 - \sin(\vartheta_\lambda + \alpha_\lambda) \cdot \bar{\varepsilon}_1]\, \mathfrak{s}_\lambda^*\, \omega_\lambda\,,$$

also

$$\bar{\mathfrak{t}}_\lambda = \bar{\mathfrak{t}}_1 + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\lambda-1} (\cos\vartheta_\varrho \cdot \bar{\varepsilon}_2 - \sin\vartheta_\varrho \cdot \bar{\varepsilon}_1)\, e_\varrho\, \omega_\varrho\,.$$

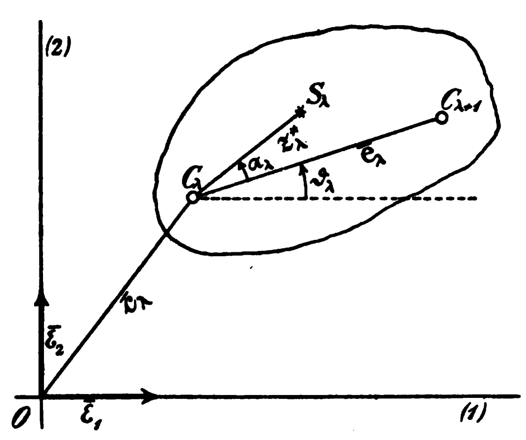


Fig. 92.

Setzt man noch zur Abkürzung*)

$$\mu_\lambda^* + \mu_{\lambda+1}^* + \mu_{\lambda+2}^* + \ldots + \mu_\nu^* = \mu_{\lambda|\nu}^*\,,$$

so wird

$$\bar{\mathfrak{p}} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu} \bar{\mathfrak{p}}_\lambda = \mu_{1|\nu}^*\, \bar{\mathfrak{t}}_1 + \sum_{\lambda=2}^{\lambda=\nu} \mu_{\lambda|\nu}^* (\cos\vartheta_\lambda \cdot \bar{\varepsilon}_2 - \sin\vartheta_\lambda \cdot \bar{\varepsilon}_1)\, e_{\lambda-1}\, \omega_{\lambda-1}$$

$$+ \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu} [\mu_\lambda^* \{\cos(\vartheta_\lambda + \alpha_\lambda) \cdot \bar{\varepsilon}_2 - \sin(\vartheta_\lambda + \alpha_\lambda) \cdot \bar{\varepsilon}_1\}\, \mathfrak{s}_\lambda^*\, \omega_\lambda]$$

oder, wenn man nach den ω ordnet,

$$\text{(I)} \qquad \bar{\mathfrak{p}} = \mu_{1|\nu}^*\, \bar{\mathfrak{t}}_1 + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu} \bar{\mathfrak{n}}_\lambda\, \omega_\lambda\,,$$

*) Das Symbol $\mu_{\lambda|\nu}^*$ kann gelesen werden: Masse λ bis Masse ν.

worin man

$$\overline{\mathfrak{n}}_\lambda = \mu_\lambda^* \{\cos(\vartheta_\lambda + \alpha_\lambda) \cdot \bar{\varepsilon}_2 - \sin(\vartheta_\lambda + \alpha_\lambda) \cdot \bar{\varepsilon}_1\} \mathfrak{s}_\lambda^* + \mu_{\lambda+1|\nu}^* (\cos\vartheta_{\lambda+1} \cdot \bar{\varepsilon}_2 - \sin\vartheta_{\lambda+1} \cdot \bar{\varepsilon}_1) e_\lambda$$

zu nehmen hat. O. Fischer definiert den Hauptpunkt (H) des Gliedes K_λ durch den Vektor $\bar{\mathfrak{z}}_\lambda$ nach der Gleichung

$$\mu_{1|\nu}^* \cdot \bar{\mathfrak{z}}_\lambda = \mu_\lambda^* \cdot \bar{\mathfrak{s}}_\lambda^* + \mu_{\lambda+1|\nu}^* \cdot \bar{e}_\lambda \,. \tag{1}$$

Dann wird

$$\overline{\mathfrak{n}_\lambda \varepsilon_3} = \mu_{1|\nu}^* \cdot \bar{\mathfrak{z}}_\lambda \,,$$

also

$$\overline{\mathfrak{n}}_\lambda = \overline{\varepsilon_3(\mathfrak{n}_\lambda \varepsilon_3)} = \mu_{1|\nu}^* \cdot \overline{\varepsilon_3 \mathfrak{z}_\lambda} \,,$$

so daß man für den Eulerschen Impulsvektor der Translation die einfache und anschauliche Form

$$\bar{\mathfrak{p}} = \mu_{1|\nu}^* \left[\bar{t}_1 + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu} \overline{\omega_\lambda \mathfrak{z}_\lambda}\right] \tag{A}$$

erhält. Für die räumliche Kette gilt derselbe Ausdruck.

Es bleibt noch (Nr. 176)

$$\overline{\mathfrak{V}}_\lambda = \mu_\lambda^* \cdot \overline{\mathfrak{s}_\lambda^* t_\lambda} + \overline{\mathfrak{J}}_\lambda$$

durch die gewählten Größen auszudrücken. Dies ergibt

$$\overline{\mathfrak{s}_\lambda^* t_\lambda} = \overline{\mathfrak{s}_\lambda^* t_1} + \left[\cos(\vartheta_\lambda + \alpha_\lambda) \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\lambda-1} \cos\vartheta_\varrho \cdot e_\varrho \, \omega_\varrho + \sin(\vartheta_\lambda + \alpha_\lambda) \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\lambda-1} \sin\vartheta_\varrho \cdot e_\varrho \, \omega_\varrho\right] \mathfrak{s}_\lambda^* \cdot \bar{\varepsilon}_3 \,,$$

$$\overline{\mathfrak{J}}_\lambda = S \mu_\lambda \overline{\mathfrak{s}(\omega_\lambda \mathfrak{s})} = \bar{\omega}_\lambda S \mu_\lambda \mathfrak{s}^2 = T_\lambda \, \omega_\lambda \, \bar{\varepsilon}_3 = T_\lambda \, \bar{\omega}_\lambda \,.$$

Alle Trägheitsmomente T_λ sind auf die betreffenden Gelenkpunkte bezogen. Für $\overline{\mathfrak{V}}_\lambda$ erhalten wir den Ausdruck

$$\overline{\mathfrak{V}}_\lambda = \mu_\lambda^* \cdot \overline{\mathfrak{s}_\lambda^* t_1} + \mu_\lambda^* \mathfrak{s}_\lambda^* \cdot \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\lambda-1} e_\varrho \cos(\vartheta_\lambda + \alpha_\lambda - \vartheta_\varrho) \cdot \bar{\omega}_\varrho + T_\lambda \, \bar{\omega}_\lambda \,. \tag{II}$$

Der Impulsvektor der Rotation ist aber

$$\overline{\mathfrak{V}}^{(\lambda)} = \overline{\mathfrak{V}}_\lambda + \overline{e_\lambda(\mathfrak{p}_{\lambda+1} + \mathfrak{p}_{\lambda+2} + \cdots + \mathfrak{p}_\nu)} \,.$$

Hierin wird

$$\overline{e_\lambda(\mathfrak{p}_{\lambda+1}+\mathfrak{p}_{\lambda+2}+\cdots+\mathfrak{p}_\nu)} = \mu^*_{\lambda+1|\nu}[\overline{e_\lambda t_1} + (\bar e_\lambda \bar e_1)\cdot\bar\omega_1 + (\bar e_\lambda \bar e_2)\cdot\bar\omega_2 + \cdots + (\bar e_\lambda \bar e_\lambda)\cdot\bar\omega_\lambda] + \mu^*_{\lambda+1|\nu}(\bar e_\lambda \bar z^*_\lambda)\bar\omega_{\lambda+1}$$
$$+\mu^*_{\lambda+2|\nu}\cdot(\bar e_\lambda \bar e_{\lambda+1})\cdot\bar\omega_{\lambda+1} + \mu^*_{\lambda+2|\nu}(\bar e_\lambda \bar z^*_{\lambda+2})\bar\omega_{\lambda+2}$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\mu^*_\nu\cdot(\bar e_\lambda \bar e_{\nu-1})\cdot\bar\omega_{\nu-1} + \mu^*_\nu\cdot(\bar e_\lambda \bar z^*_\nu)\cdot\bar\omega_\nu\,.$$

Die Einführung der Fischerschen Hauptpunkte nach Gleichung (1) liefert den Ausdruck

$$\overline{e_\lambda(\mathfrak{p}_{\lambda+1}+\cdots+\mathfrak{p}_\nu)}$$
$$= \mu^*_{\lambda+1|\nu}[\overline{e_\lambda t_1} + (\bar e_\lambda \bar e_1)\bar\omega_1 + (\bar e_\lambda \bar e_2)\bar\omega_2 + \cdots + (\bar e_\lambda \bar e_\lambda)\bar\omega_\lambda]$$
$$+\mu^*_{1|\nu}[(\bar e_\lambda \bar z'_{\lambda+1})\bar\omega_{\lambda+1} + (\bar e_\lambda \bar z'_{\lambda+2})\bar\omega_{\lambda+2} + \cdots + (\bar e_\lambda \bar z'_\nu)\bar\omega_\nu]\,.$$

Wir berücksichtigen jetzt die Gleichung (II) und erhalten zunächst für das von ω freie Glied

$$\mu^*_\lambda\cdot\overline{z^*_\lambda t_1} + \mu^*_{\lambda+1|\nu}\cdot\overline{e_\lambda t_1} = \mu^*_{1|\nu}\cdot\overline{z'_\lambda t_1}$$

und es wird

$$\bar{\mathfrak{V}}^{(\lambda)} = [T_\lambda + \mu^*_{\lambda+1|\nu}\cdot e^2_\lambda]\,\bar\omega_\lambda + \mu^*_{1|\nu}\left[\overline{z'_\lambda t_1} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\lambda-1}(\bar e_\varrho \bar z'_\lambda)\,\bar\omega_\varrho + \sum_{\varrho=\lambda+1}^{\varrho=\nu}(\bar e_\lambda \bar z'_\varrho)\,\bar\omega_\varrho\right].$$

Der Faktor von $\bar\omega_\lambda$ ist das Trägheitsmoment des Kettenelementes K_λ zusätzlich der Massen aller bis zum Ende folgenden Elemente $K_{\lambda+1}, K_{\lambda+2}, \ldots K_\nu$, welche man sich in dem Gelenkpunkte $C_{\lambda+1}$ vereinigt denken muß. Setzen wir also zur Abkürzung dieses Trägheitsmoment

$$T_\lambda + \mu^*_{\lambda+1|\nu}\cdot e^2_\lambda = T_{\lambda|\nu}\,,$$

so wird

$$\text{(B)}\quad \bar{\mathfrak{V}}^{(\lambda)} = T_{\lambda|\nu}\,\bar\omega_\lambda + \mu^*_{1|\nu}\left[\overline{z'_\lambda t_1} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\lambda-1}(\bar e_\varrho \bar z'_\lambda)\,\bar\omega_\varrho + \sum_{\varrho=\lambda+1}^{\varrho=\nu}(\bar e_\lambda \bar z'_\varrho)\,\bar\omega_\varrho\right].$$

198. Der Kurbelmechanismus bei beliebiger Massenverteilung in den Gliedern. — Sein Impulsvektor. Für diskrete Massenpunkte haben wir diese Aufgabe bereits in Nr. 177 durchgeführt. Hier handelt es sich um die Betrachtung des Systems als Gelenkkette. Das erste Glied K_1 ist die Welle mit Schwungrad und Kurbelarm (Fig. 93), das zweite Glied K_2 die Lenkstange und das dritte Glied K_3 wird durch den Kreuzkopf, die Kolbenstange und den Kolben dargestellt.

Für die Aufstellung der kinematischen Systemvektoren kann man sich auf die beiden ersten Glieder beschränken, wenn man im Kreuzkopfzapfen C_3 die Masse μ_3^* von K_3 der Lenkstange K_2 zufügt. Wir verstehen daher im folgenden unter μ_2^*, T_2 diejenigen Größen, welche bei Berücksichtigung dieser Zusatzmasse gebildet sind. Da C_1 ein fester Punkt ist, so wird nach den bisherigen Bezeichnungen für das zweigliedrige System

$$S\mu_1 \bar{v}_1 \,\delta\bar{x}_1 + S\mu_2 \bar{v}_2 \,\delta\bar{x}_2 = \overline{\mathbf{V}}^{(1)}\delta\bar{\vartheta}_1 + \overline{\mathbf{V}}^{(2)}\delta\bar{\vartheta}_2\,,$$

wo

$$\overline{\mathbf{V}}^{(1)} = \mathbf{V}_1 + \overline{e_1\,\mathfrak{p}_2}\,, \quad \overline{\mathbf{V}}^{(2)} = \overline{\mathbf{V}}_2$$

zu setzen ist.

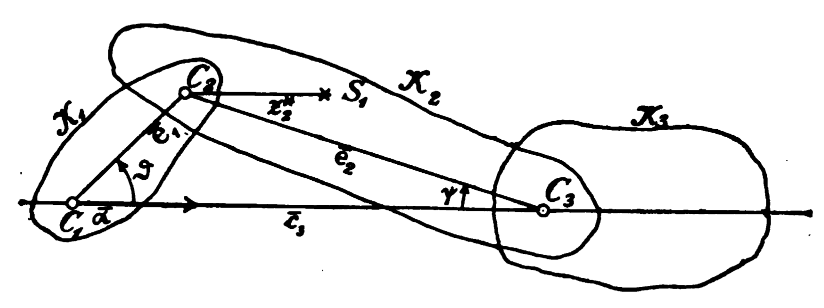


Fig. 98.

Die Amplituden ϑ_1 und ϑ_2 der Gelenkstrecken $\bar{e}_1$ und $\bar{e}_2$ sind aber nicht unabhängig, da

$$\bar{e}_1 + \bar{e}_2 = \bar{c}_3$$

sein muß. Folglich wird

$$\overline{c_3\,e_1} + \overline{c_3\,e_2} = 0\,,$$

d. h.

$$e_1 \sin\vartheta_1 + e_2 \sin\vartheta_2 = 0\,,$$

woraus

$$e_1 \cos\vartheta_1 \cdot \delta\vartheta_1 + e_2 \cos\vartheta_2 \cdot \delta\vartheta_2 = 0$$

folgt. Setzen wir also

$$\delta\vartheta_2 = \varkappa\,\delta\vartheta_1$$

und dementsprechend auch

$$\delta\bar{\vartheta}_2 = \varkappa\,\delta\bar{\vartheta}_1\,,$$

so wird

$$\varkappa = -\frac{e_1}{e_2}\frac{\cos\vartheta_1}{\cos\vartheta_2} = \frac{\operatorname{tg}\vartheta_2}{\operatorname{tg}\vartheta_1}.$$

Infolge dieses Zusammenhanges zwischen den Größen ϑ_1, ϑ_2 erhält man

$$\overline{\mathfrak{V}}^{(1)}\delta\overline{\vartheta}_1 + \overline{\mathfrak{V}}^{(2)}\delta\overline{\vartheta}_2 = \overline{\mathfrak{V}}\,\delta\overline{\vartheta}_1,$$

wenn $\vartheta_1 = \vartheta$ als die Positionskoordinate des zwangläufigen Systems angesehen wird. Der Systemvektor der Impulsion ist also bestimmt durch die Gleichung

$$\overline{\mathfrak{V}} = \overline{\mathfrak{V}}^{(1)} + \varkappa\cdot\overline{\mathfrak{V}}^{(2)}.$$

Wegen

$$\overline{v}_1 = \overline{\omega_1\, z_1}, \quad \overline{v}_2 = \overline{\omega_1\, e_1} + \overline{\omega_2\, z_2}$$

wird

$$\overline{\mathfrak{V}}_1 = S\mu_1\,\overline{z_1(\omega_1\, z_1)} = \overline{\omega}_1\cdot S\mu_1\, z_1^2 = T_1\,\overline{\omega}_1$$

$$\overline{\mathfrak{V}}_2 = S\mu_2\,\overline{z_2\overline{v}_2} = S\mu_2\cdot\overline{z_2(\omega_1\, e_1)} + S\mu_2\,\overline{z_2(\omega_2\, z_2)}$$

$$= \mu_2^*(\overline{z}_2^*\cdot\overline{e}_1)\cdot\overline{\omega}_1 + T_2\,\overline{\omega}_2.$$

Ferner ist

$$\overline{\mathfrak{p}}_2 = S\mu_2\,\overline{v}_2,$$

also

$$\overline{e_1\,\mathfrak{p}_2} = S\mu_2\,\overline{e_1\,\overline{v}_2} = S\mu_2\,\overline{e_1(\omega_1\, e_1)} + S\mu_2\,\overline{e_1(\omega_2\, z_2)}$$

oder

$$\overline{e_1\,\mathfrak{p}_2} = \mu_2^*\, e_1^2\,\overline{\omega}_1 + \mu_2^*(\overline{z}_2^*\,\overline{e}_1)\,\overline{\omega}_2.$$

Man erhält so

$$\overline{\mathfrak{V}}^{(1)} = (T_1 + \mu_2^*\, e_1^2)\,\overline{\omega}_1 + \mu_2^*(\overline{z}_2^*\,\overline{e}_1)\,\overline{\omega}_2$$

$$\overline{\mathfrak{V}}^{(2)} = T_2\,\overline{\omega}_2 + \mu_2^*(\overline{z}_2^*\,\overline{e}_1)\,\overline{\omega}_1$$

und endlich für den Vektor der Impulsion

$$\overline{\mathfrak{V}} = \{T_1 + \mu_2^*\, e_1^2 + \varkappa^2\, T_2 + 2\,\varkappa\,\mu_2^*\,\overline{z}_2^*\,\overline{e}_1\}\,\overline{\omega},$$

wenn

$$\omega = \frac{d\vartheta_1}{d\tau} = \frac{d\vartheta}{d\tau}$$

in Übereinstimmung mit der bisherigen Bezeichnung geschrieben wird.

Ist nun ferner $\overline{\alpha}$ ein Einheitsvektor in der festen Richtung $C_1 C_3$ und $\overline{\eta}$ ein Einheitsvektor, welcher auf der

Ebene des Kurbelmechanismus senkrecht steht, so kann man

$$\bar{e}_1 = e_1 [\bar{\alpha} \cos\vartheta + \overline{\eta\alpha} \sin\vartheta]$$

und

$$\bar{s}_2^* = s_2^* [\bar{\alpha} \cos(\vartheta_2 + \gamma) + \overline{\eta\alpha} \sin(\vartheta_2 + \gamma)]$$

oder auch für $2\pi - \vartheta_2 = -\psi$

$$\bar{s}_2^* = s_2^* [\bar{\alpha} \cos(\gamma + \psi) + \overline{\eta\alpha} \sin(\gamma + \psi)]$$

setzen und erhält für das in $\bar{\mathbf{V}}$ vorkommende Streckenprodukt

$$\bar{s}_2^* \bar{e}_1 = s_2^* e_1 \cos(\vartheta - \psi - \gamma),$$

und es ist

$$\varkappa = -\frac{\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}\vartheta},$$

so daß man den Impulsvektor auch in die Form

$$\bar{\mathbf{V}} = \left\{ T_1 + \mu_2^* e_1^2 + \frac{\operatorname{tg}^2\psi}{\operatorname{tg}^2\vartheta} T_2 - 2\mu_2^* \frac{\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}\vartheta} s_2^* e_1 \cos(\vartheta - \psi - \gamma) \right\} \bar{\omega}$$

bringen kann. Für die beiden Winkel ϑ und ψ besteht die Konnexgleichung

$$e_1 \sin\vartheta = e_2 \sin\psi .$$

Setzt man also $e_1 = r$, $e_2 = l$, so erhält man $\bar{\mathbf{V}}$ in der üblichen Schreibweise. T_1 ist das Trägheitsmoment der rotierenden Teile (Welle, Schwungrad, Kurbelarm) um die Wellenachse, T_2 das Trägheitsmoment der Lenkstange im Kreuzkopfzapfen vermehrt um die Masse der rein translatorischen Teile (Kreuzkopf, Kolbenstange, Kolben). Man kennt auch jetzt die kinetische Energie*) des Getriebes:

$$\mathbf{E} = \tfrac{1}{2} \bar{\mathbf{V}} \bar{\omega} = \tfrac{1}{2} \mathbf{F} \omega^2,$$

wenn $\mathbf{F}$ den Faktor von $\bar{\omega}$ in $\bar{\mathbf{V}}$ bedeutet.

---

*) Der Ausdruck für $\mathbf{E}$ läßt sich auch unmittelbar aus den Formen der Elementargeschwindigkeiten

$$\bar{v}_1 = \overline{\omega s_1}, \quad \bar{v}_2 = \overline{\omega(e_1 + \varkappa s_1)}$$

ableiten. Denn man hat

$$S\mu_1 v_1^2 = T_1 \omega^2 \quad \text{und} \quad S\mu_2 v_2^2 = [\mu_2^* e_1^2 + 2\varkappa\mu_2^*(\bar{e}_1 \bar{s}_2^*) + \varkappa^2 T_2]\,\omega^2,$$

woraus durch Addition

$$\mathbf{E} = \tfrac{1}{2} [T_1 + \mu_2^* e_1^2 + \varkappa^2 T_2 + 2\varkappa\mu_2^*(\bar{e}_1 \bar{s}_2^*)]\,\omega^2$$

wie oben folgt.

199. Der Systemvektor der Beschleunigung für das Kurbelgetriebe mit beliebiger Massenverteilung. Hier ist nach den Gleichungen (2') und (3') von Nr. 195

$$\overline{\mathbf{W}}^{(1)} = \frac{d\overline{\mathbf{V}}^{(1)}}{d\tau} + \overline{e_1\, \mathfrak{q}_2}$$

$$\overline{\mathbf{W}}^{(2)} = \frac{d\overline{\mathbf{V}}^{(2)}}{d\tau} + \overline{(\omega_1\, e_1)\, \mathfrak{p}_2}$$

und es wird

$$S\mu_1\, \overline{w}_1\, \delta\overline{x}_1 + S\mu_2\, \overline{w}_2\, \delta\overline{x}_2 = \overline{\mathbf{W}}^{(1)}\delta\overline{\vartheta}_1 + \overline{\mathbf{W}}^{(2)}\delta\overline{\vartheta}_2$$

$$= [\overline{\mathbf{W}}^{(1)} + \varkappa\overline{\mathbf{W}}^{(2)}]\, \delta\overline{\vartheta} = \overline{\mathbf{W}}\, \delta\overline{\vartheta}\,,$$

also

$$\overline{\mathbf{W}} = \overline{\mathbf{W}}^{(1)} + \varkappa\, \overline{\mathbf{W}}^{(2)}.$$

Man kommt jedoch viel einfacher zu dem fertigen Ausdruck für $\overline{\mathbf{W}}$, wenn man die Zentralgleichung in der Form

$$\frac{d}{d\tau}(\overline{\mathbf{V}}\, \delta\overline{\vartheta}) - \delta\mathbf{E} = \overline{\mathbf{W}}\, \delta\overline{\vartheta}$$

benutzt. Da $\delta\overline{\vartheta}$ mit $\overline{\mathbf{V}}$ und $\overline{\mathbf{W}}$ gleichgerichtet ist, so kann man diese Gleichung auch schreiben

$$\frac{d}{d\tau}(\mathbf{V}\, \delta\vartheta) - \delta\mathbf{E} = \mathbf{W}\, \delta\vartheta$$

oder

$$\frac{d\mathbf{V}}{d\tau}\delta\vartheta + \mathbf{V}\frac{d}{d\tau}(\delta\vartheta) - \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\vartheta}\delta\vartheta - \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\omega}\delta\left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right) = \mathbf{W}\, \delta\vartheta\,.$$

Nimmt man jetzt

$$\frac{d}{d\tau}(\delta\vartheta) = \delta\left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right),$$

so wird wegen

$$\mathbf{V} = \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\omega}$$

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{d\tau} - \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\vartheta}\right)\delta\vartheta = \mathbf{W}\cdot\delta\vartheta\,,$$

d. h. man erhält die **Lagrange**sche Gleichung

$$\mathbf{W} = \frac{d\mathbf{V}}{d\tau} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vartheta},$$

also auch

$$\overline{\mathbf{W}} = \frac{d\overline{\mathbf{V}}}{d\tau} - \frac{\omega}{2}\frac{\partial \overline{\mathbf{V}}}{\partial \vartheta}.$$

Da $\overline{\mathbf{V}}$ explizit dargestellt ist, so kennt man nach Ausführung der Differentiationen auch den Systemvektor der Beschleunigung in fertiger Form.

200. Zylindergelenkketten mit windschiefen Achsen. Das zylindrische Zapfengelenk, welches zwei starre Körper miteinander verbindet, ist in beiden Kettengliedern als eine zwar im Raum bewegliche, aber in den Kettenelementen feste Achse anzusehen. Die Lage der beiden Achsen in einem

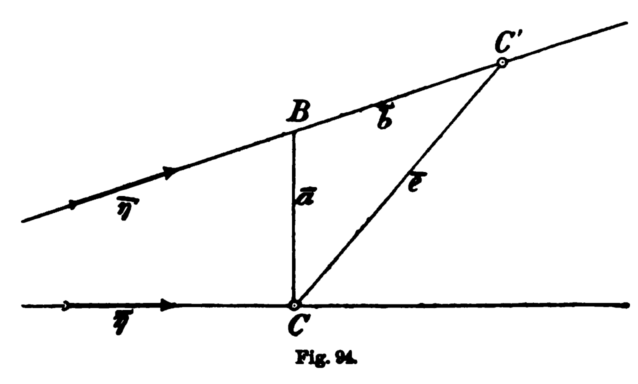


Fig. 94.

starren Kettengliede braucht von vornherein keiner Beschränkung unterworfen zu werden. Um die Rotationspunkte und das im einzelnen Glied feste Achsenkreuz zu fixieren, denken wir uns den kürzesten Abstand der im allgemeinen windschiefen Drehachsen konstruiert und betrachten den Anfangspunkt derselben als den Rotationspunkt (C) des Gliedes. Von dem Endpunkt des kürzesten Abstandes ($\bar{a}$) in der zweiten Achse ($\bar{\eta}'$) gehen wir in positiver Richtung um eine beliebige Strecke ($\bar{b}$) dieser Achse weiter und legen so den folgenden Rotationspunkt C' fest. In Fig. 94 wird also $\bar{a} + \bar{b} = \bar{e}$, wenn $\bar{e}$ die Verbindungsstrecke der Punkte C und C' bezeichnet. Hiermit ist auch zugleich das recht-

winklige Achsenkreuz in dem betreffenden Kettengliede fixiert. Denn bezeichnen wir mit $\overline{\alpha}$ den Einheitsvektor in der Richtung des kürzesten Abstandes $\overline{a}$, so sind $\overline{\eta}$, $\overline{\alpha}$, $\overline{\eta\alpha}$ drei aufeinander senkrecht stehende Einheitsvektoren, auf welche alle Punkte des Gliedes bezogen werden können.

Der Winkel γ zwischen zwei aufeinander folgenden Drehachsen ist bestimmt durch die Gleichung

$$\sin\gamma \cdot \overline{\alpha} = \overline{\eta\eta'} .$$

Wir betrachten nun drei aufeinander folgende Kettenglieder K, K' und K''. Die Richtungen der Drehachsen seien durch die Einheitsvektoren $\overline{\eta}$, $\overline{\eta}'$, $\overline{\eta}''$ bestimmt.

Dieser Voraussetzung entspricht dann das Schema

K:	K':	K'':
$\overline{\eta}, \overline{\alpha}, \overline{\eta}'$	$\overline{\eta}', \overline{\alpha}', \overline{\eta}''$	$\overline{\eta}'', \overline{\alpha}''$
$\overline{a}, \overline{b}$	$\overline{a}', \overline{b}'$	
$\overline{a} + \overline{b} = \overline{e}$	$\overline{a}' + \overline{b}' = \overline{e}'$	
$\sin\gamma \cdot \overline{\alpha} = \overline{\eta\eta'}$	$\sin\gamma' \cdot \overline{\alpha}' = \overline{\eta'\eta''}$	

wo aber $\overline{\alpha}''$ nicht einen kürzesten Abstand bedeutet, sondern eine beliebig wählbare Einheitsstrecke in K'' darstellt. Die Winkelgeschwindigkeit von K um $\overline{\eta}$ sei $\overline{\omega}$. K' drehe sich um die Achse $\overline{\eta}'$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\overline{\omega}'$ usw.

Bezeichnen wir wieder — wie früher — die Vektoren der Rotationspunkte C, C', C'' von einem ruhenden Punkte O des Raumes gerechnet mit $\overline{c}$, $\overline{c}'$, $\overline{c}''$ und setzen

$$\overline{c' - c} = \overline{e}, \quad \overline{c'' - c'} = \overline{e}',$$
$$\overline{x - c} = \overline{z}, \quad \overline{x' - c'} = \overline{z}', \quad \overline{x'' - c''} = \overline{z}'',$$

so werden die Elementargeschwindigkeiten eines Systempunktes in den einzelnen Kettengliedern dargestellt durch die Gleichungen:

$$\overline{v} = \overline{\omega z}, \quad \overline{v}' = \overline{\omega e} + \overline{(\omega + \omega')z'},$$
$$\overline{v}'' = \overline{\omega e} + \overline{(\omega + \omega')e'} + \overline{(\omega + \omega' + \omega'')z''}.$$

Hiermit ist die kinetische Energie der Kette

$$\mathsf{E} = \tfrac{1}{2} S \mu v^2 + \tfrac{1}{2} S \mu' v'^2 + \tfrac{1}{2} S \mu'' v''^2$$

zu bilden. Die explizite Ausführung verlangt die vollständige Kenntnis der Beziehungen zwischen den aufeinander folgenden

Koordinatensystemen, welche an den einzelnen Gliedern der Kette festgelegt sind. Diese sind im vorliegenden Falle wesentlich einfacher als bei der Kette mit Kugelgelenkverbindung, weil jedes Glied relativ zu dem vorangehenden nur einen Freiheitsgrad der Beweglichkeit besitzt. Immerhin wird die vollständige Durchführung des analytischen Ausdruckes für die kinetische Energie des ganzen Systems nicht einfach, da die Anzahl der geometrischen Elemente und die Zahl der kinematischen Größen (Trägheitsmomente und Deviationsmomente) mit der Zahl der Glieder proportional wächst. Bei der vorliegenden Beschränkung ist die vollständige Durchführung leicht. In der Mechanik der elastischen, ursprünglich doppeltgekrümmten Drähte (Bd. 2) kommen wir auf dieses kinematische Problem zurück.

V. Abschnitt.

Allgemeine Systeme.

---

201. Erweiterung des Systembegriffs. Bisher haben wir als Objekte der Bewegung nur den einzelnen materiellen Punkt, Systeme getrennter materieller Punkte, den starren Körper und Ketten aus starren Gliedern betrachtet. Dies entsprach einem systematischen Aufbau der Kinematik, der durch die geschichtliche Entwicklung derselben wohl begründet ist. Galilei und Newton haben sich im wesentlichen auf den materiellen Punkt beschränkt. Sobald sich das Bedürfnis zur Erforschung der Bewegungsformen gebundener Systeme dringend geltend machte, boten sich zwei verschiedene Wege dar, die auch beide eingeschlagen wurden. Man konnte entweder bei der elementaren Vorstellung des materiellen Punktes stehen bleiben und nach dem Vorbild der antiken Atomistik den starren Körper als eine unveränderliche Verbindung solcher Punkte*) aufbauen oder man ging unmittelbar zur Auffassung der möglichen Bewegungsformen des starren Körpers über, wie es von Varignon, D'Alembert und Euler geschehen ist. Dieser letztere Weg ist im dritten Abschnitt ausführlich dargestellt. In neuerer Zeit ist er noch durch einige spezifisch geometrische Ideen**) bereichert worden, die wir jedoch absichtlich aus dem Rahmen dieses elementaren Lehrbuches ausgeschlossen haben. Für die Weiterbildung der Kinematik im Hinblick auf die mannigfachen Anwendungen derselben erscheint auch

---

*) Man vergleiche Broch, Lehrbuch der Mechanik (1854), S. 26, wo der Lagrangesche Ansatz in diesem Sinne ausgeführt ist.

**) Namentlich durch die Arbeiten von Lie, Killing und Study.

zurzeit eine Durchführung der Theorie der Körperketten eine weit dringendere Aufgabe als die Verfolgung von Problemen, deren Interesse fast ausschließlich auf dem Gebiete der Geometrie liegt und zunächst nur auf die Entwicklung dieser Wissenschaft fördernd wirkt. Die moderne Mechanik verlangt in ihrem gegenwärtigen Entwicklungsstadium vor allem eine systematische Ausbildung der Theorie der Körperketten, von der wir im vorigen Abschnitte aus methodischen Gründen nur die elementarsten Teile berücksichtigt haben. Da aber zur Weiterführung dieses Zweiges der Kinematik die allgemeinen Hilfsmittel fertig vorliegen und da außerdem der Antrieb von seiten der Physik und Technik täglich wächst, so ist die Ausfüllung dieser Lücke nur eine Frage der Zeit.

Die Systeme aus starren Elementen, die sich aufeinander stützen, teilweise voneinander abgleiten oder abrollen oder hier und da ihren Zusammenhang vorübergehend lösen, bilden eine Mannigfaltigkeit der Formen, deren Einreihung in bestimmt abgegrenzte Typen auf den ersten Blick unausführbar erscheint. Handelt es sich aber darum, irgend eine gegebene Kombination aus starren Elementen kinematisch zu erfassen, so sind nur zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem jede Position des ganzen Systems sich durch eine endliche Zahl von Parametern darstellen läßt oder nicht. Im ersten Falle wird die Geschwindigkeit jedes beliebigen Systempunktes eine lineäre Funktion der Parametergeschwindigkeiten, so daß also die kinetische Energie des Systems und damit auch die Komponenten

$$\mathbf{Q}_\iota = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \dot{\vartheta}_\iota}\right) - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vartheta_\iota}$$

der Beschleunigung des Systems gerade so einfach und übersichtlich darstellbar sind, wie bei den bisher behandelten spezielleren Systemen. Im zweiten Falle sind nicht integrable Bedingungsgleichungen, wie wir sie in Nr. 188 betrachtet haben, vorhanden. Man überzeugt sich jedoch leicht, daß die in Nr. 190 und 191 gegebenen Entwicklungen ohne weiteres auf die allgemeineren Systeme, welche wir jetzt im Auge haben, übertragbar sind, wenn man nur die Anzahl der allgemeinen Koordinaten und die Bedingungsgleichungen zwischen den Hilfsgrößen ω_ι der Beschaffenheit des Systems entsprechend wählt. Die Zentralgleichung in der spezi-

ellen Lagrangeschen Form oder in ihrer verallgemeinerten Fassung (Nr. 185) behält ihre Gültigkeit, wenn wir die Komponenten $\mathbf{P}_\iota$ und $\mathbf{Q}_\iota$ bei beliebig vielen Positionskoordinaten ebenso definieren, wie in den bisher behandelten einfacheren Fällen.

Zu den allgemeinen Stützsystemen gehört das in neuerer Zeit*) betrachtete Schrotsystem, eine Anhäufung von Kugeln gleicher Größe und gleicher Masse, die aufeinander gleiten, voneinander abrollen oder sich zum Teil voneinander trennen können. Eine eingehendere kinematische Untersuchung der möglichen Bewegungen eines solchen Kugelhaufens würde zweifellos eine rationelle Grundlage für die Statik und Kinetik loser Erdmassen liefern, die auch vielleicht der experimentellen Kritik eine festere Handhabe bieten würde als die bisherigen Ansätze.

202. Modellsysteme der Physiker. Die kinematische Verwandtschaft verschiedener materieller Systeme wird am einfachsten in ihren entsprechenden Energieformen ($\mathbf{E}$) zum Ausdruck kommen. Zeigt eine gewisse Gruppe von materiellen Systemen im Gegensatz zu anderen einen nahezu übereinstimmenden Bau der Funktion $\mathbf{E}$, so ist man von vornherein sicher, daß auch die möglichen Bewegungsformen, für welche alle Komponenten der Systembeschleunigung verschwinden, im wesentlichen miteinander übereinstimmen werden. Dieser Gedanke und dynamische Betrachtungen, welche wir im zweiten Bande bringen werden, haben zuerst Maxwell**) darauf geführt, die Form der kinetischen Energie ($\mathbf{E}$) geradezu zur Charakterisierung von gebundenen Systemen zu benutzen, die in ihren Bewegungsformen wichtige physikalische Gesetze zum Ausdruck bringen. Gelingt es nun, sich irgend ein materielles System explizit vorzustellen oder zu realisieren, welches die vorausgesetzte Energieform hat, so ist man im Besitz eines „Modells", welches den Komplex der physikalischen Erscheinungen, welchen man in seinen gesetzmäßigen Verknüpfungen erklären will, gleichsam mechanisch vor Augen führt. In diesem Sinne haben nach dem Vorgange Maxwells namentlich v. Helmholtz***),

*) Man vergleiche Obsborne Reynolds, Papers on mechanical and physical subjects, Bd. 2, S. 203—216.

**) Scientific Papers, Bd. 1, Abhandl. XXV.

***) Gesammelte Werke, Bd. 3.

Boltzmann*) und J. J. Thomson**) wichtige Gebiete der Physik und der physikalischen Chemie rein mechanisch darzustellen versucht. Wir müssen uns mit der Andeutung dieses interessanten Forschungsgebietes begnügen und werden in der Dynamik (Bd. 2) einige Ausführungen in elementarer Form bringen.

203. Die konjugierte Energieform. Hamilton (1805 bis 1865), dem begeisterten Verehrer Lagranges und seiner „Mécanique Analytique", war es vorbehalten, einen bedeutenden Schritt***) in der Weiterbildung der Lagrangeschen Ideen zu tun. Er benutzt die kinetische Energie E nicht in der ursprünglichen Form

$$\mathsf{E} = \frac{1}{2} \sum_{rs} A_{rs} \dot{\vartheta}_r \dot{\vartheta}_s, \tag{1}$$

sondern führt†) an Stelle der Parametergeschwindigkeiten $\dot{\vartheta}$ die Impulskomponenten

$$\mathsf{P}_\iota = \frac{\partial \mathsf{E}}{\partial \dot{\vartheta}_\iota}$$

ein, so daß die kinetische Energie die Form

$$\mathsf{F} = \frac{1}{2} \sum_{rs} \mathfrak{B}_{rs} \mathsf{P}_r \mathsf{P}_s \tag{2}$$

annimmt. Die Funktion F stimmt natürlich dem Werte nach mit E überein.

Nach dem Satze von den homogenen Funktionen ist nun

$$2\,\mathsf{E} = \sum_\nu \frac{\partial \mathsf{E}}{\partial \dot{\vartheta}_\nu} \dot{\vartheta}_\nu = \sum_\nu \mathsf{P}_\nu \dot{\vartheta}_\nu .$$

Folglich besteht die identische Gleichung

$$\mathsf{E} - \Sigma \mathsf{P}_\nu \dot{\vartheta}_\nu = -\mathsf{F} . \tag{3}$$

Wir nennen die durch die Gleichung (2) dargestellte Größe die konjugierte Energieform des Systems.

*) Vorles. über Maxwells Theorie der Elektrizität und des Lichtes, 1. Teil, 1891.

**) Applications of dynamics to physics and chemistry, 1888.

***) Irish Philos. Transactions, 1835.

†) Dieser Ersatz wurde bereits vor Hamilton durch Poisson eingeführt und in der zweiten Auflage der Méc. analyt. tome I, pag. 336 auch von Lagrange benutzt, wo man die kanonischen Formen der Beschleunigungskomponenten in anderer Auffassung findet.

204. Kanonische Form für die Komponenten der Systembeschleunigung. Als Ausgangspunkt verwenden wir die Lagrangesche Zentralgleichung in der ursprünglichen Form

$$\frac{d}{d\tau}\sum_\nu \mathbf{P}_\nu\,\delta\vartheta_\nu = \delta\mathbf{E} + \sum_\nu \mathbf{Q}_\nu\,\delta\vartheta_\nu \tag{1}$$

oder nach Ausführung der Differentialquotienten nach der Zeit und Ersatz von $d\,\delta\vartheta_\nu$ durch $\delta\,d\vartheta_\nu$:

$$\sum_\nu \dot{\mathbf{P}}_\nu\,\delta\vartheta_\nu + \sum_\nu \mathbf{P}_\nu\,\delta\dot{\vartheta}_\nu = \delta\mathbf{E} + \sum_\nu \mathbf{Q}_\nu\,\delta\vartheta_\nu\,. \tag{2}$$

Nun ist

$$\delta\sum_\nu \mathbf{P}_\nu\,\dot{\vartheta}_\nu = \sum_\nu \mathbf{P}_\nu\,\delta\dot{\vartheta}_\nu + \sum_\nu \delta\mathbf{P}_\nu\,\dot{\vartheta}_\nu\,, \tag{3}$$

d. h.

$$\delta\sum_\nu \mathbf{P}_\nu\,\dot{\vartheta}_\nu - \sum_\nu \delta\mathbf{P}_\nu\,\dot{\vartheta}_\nu + \sum_\nu \mathbf{P}_\nu\,\delta\dot{\vartheta}_\nu = \delta\mathbf{E} + \sum_\nu \mathbf{Q}_\nu\,\delta\vartheta_\nu\,. \tag{4}$$

Bringt man jetzt die letzte Gleichung in die Form

$$\delta\Big[\sum_\nu \mathbf{P}_\nu\,\dot{\vartheta}_\nu - \mathbf{E}\Big] = \sum_\nu \delta\mathbf{P}_\nu\,\dot{\vartheta}_\nu - \sum_\nu \dot{\mathbf{P}}_\nu\,\delta\vartheta_\nu + \sum_\nu \mathbf{Q}_\nu\,\delta\vartheta_\nu$$

und beachtet, daß nach (3), Nr. 203

$$\sum_\nu \mathbf{P}_\nu\,\dot{\vartheta}_\nu - \mathbf{E} = \mathbf{F}$$

ist, so erhält man

$$\delta\mathbf{F} = \sum_\nu (\mathbf{Q}_\nu - \dot{\mathbf{P}}_\nu)\,\delta\vartheta_\nu + \sum_\nu \dot{\vartheta}_\nu\,\delta\mathbf{P}_\nu\,. \tag{5}$$

Die konjugierte Energieform $\mathbf{F}$ ist eine Funktion der unabhängig Veränderlichen ϑ und $\mathbf{P}$. Folglich hat man

$$\delta\mathbf{F} = \sum_\nu \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\vartheta_\nu}\,\delta\vartheta_\nu + \sum_\nu \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{P}_\nu}\,\delta\mathbf{P}_\nu\,. \tag{6}$$

Die Darstellungen (5) und (6) können nur miteinander übereinstimmen, wenn

$$\mathbf{Q}_\nu - \dot{\mathbf{P}}_\nu = \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\vartheta_\nu} \quad \text{und} \quad \frac{d\vartheta_\nu}{d\tau} = \frac{\partial\mathbf{F}_\nu}{\partial\mathbf{P}_\nu}$$

ist. Hiermit hat man die Lagrangeschen Komponenten der Systembeschleunigung ausgedrückt durch die Gleichung

$$\mathbf{Q}_\nu = \frac{d\mathbf{P}_\nu}{d\tau} + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\vartheta_\nu}\,, \tag{I}$$

welche **Jacobi** als **kanonische Form** bezeichnet hat. Die zweite Gleichung

$$\text{(II)} \qquad \frac{d\vartheta_\nu}{d\tau} = \frac{\partial \mathsf{F}}{\partial \mathsf{P}_\nu}$$

gibt unmittelbar die Parametergeschwindigkeiten. Der Zusammenhang dieser Gleichungen mit den ursprünglichen **Lagrange**schen Darstellungen

$$\text{(A)} \qquad \mathsf{Q}_\nu = \frac{d\mathsf{P}_\nu}{d\tau} - \frac{\partial \mathsf{E}}{\partial \vartheta_\nu},$$

$$\text{(B)} \qquad \mathsf{P}_\nu = \frac{\partial \mathsf{E}}{\partial \dot{\vartheta}_\nu}$$

zeigt unmittelbar, daß sich die in Betracht kommenden Größen nach dem Schema

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} \dot{\vartheta}, & \mathsf{E}, & \mathsf{P}, & \dfrac{\partial \mathsf{E}}{\partial \vartheta}, \\ \mathsf{P}, & \mathsf{F}, & \dot{\vartheta}, & -\dfrac{\partial \mathsf{F}}{\partial \vartheta} \end{cases}$$

entsprechen. Insbesondere ist für die beiden Energieformen

$$\text{(8)} \qquad \frac{\partial \mathsf{F}}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial \mathsf{E}}{\partial \vartheta}.$$

205. Anwendung auf das sphärische Pendel. Wir wollen die im vorstehenden behandelte kanonische Transformation der **Lagrange**schen Beschleunigungskomponenten auf das bereits in Nr. 53 behandelte einfache Beispiel anwenden, indem wir dort

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \vartheta \quad \text{und} \quad \lambda = \psi$$

setzen. ϑ ist dann der Ausschlag des Pendels und der Ausdruck für die kinetische Energie lautet:

$$E = \tfrac{1}{2} a^2 (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta \cdot \dot{\psi}^2).$$

Hieraus folgt

$$P_\vartheta = a^2 \dot{\vartheta} \quad \text{und} \quad P_\psi = a^2 \sin^2\vartheta \cdot \dot{\psi},$$

so daß man für die konjugierte Energieform sofort erhält

$$F = \frac{1}{2a^2}\left[P_\vartheta^2 + \frac{1}{\sin^2\vartheta} P_\vartheta^2\right].$$

Nun ist

$$\frac{\partial F}{\partial \vartheta} = -\frac{1}{a^2}\frac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}P_\psi^2, \quad \frac{\partial F}{\partial \psi} = 0$$

und man hat sofort die kanonische Form der Lagrangeschen Beschleunigungskomponenten:

$$\begin{cases} Q_\vartheta = \dfrac{dP_\vartheta}{\partial \tau} - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\operatorname{ctg}\vartheta}{\sin^2\vartheta}P_\psi^2, \\ Q_\psi = \dfrac{dP_\psi}{d\tau}. \end{cases}$$

Die Ausdrücke für die Parametergeschwindigkeiten sind:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vartheta}{d\tau} = \dfrac{1}{a^2}P_\vartheta, \\ \dfrac{d\psi}{d\tau} = \dfrac{1}{a^2\sin^2\vartheta}P_\psi. \end{cases}$$

In der Dynamik werden diese Gleichungen ihre Anwendung finden.

206. Die Routhsche Form für die Komponenten der Systembeschleunigung. Außer den beiden bisher betrachteten Darstellungen der Lagrangeschen Komponenten gibt es noch eine dritte, welche sich in den Anwendungen der Mechanik auf fundamentale Probleme der theoretischen Physik und Chemie äußerst fruchtbar erwiesen hat. Routh kam zuerst in seiner Preisschrift „Stability of Motion" (1877) auf den Gedanken, nicht die Begleitmomente aller Lagrangeschen Koordinaten (ϑ), sondern nur diejenigen einer gewissen Anzahl, welche wir zum Unterschied von den vorigen mit ψ bezeichnen wollen, einzuführen. Die Lagrangeschen Ausdrücke für die Systembeschleunigungen, welche diesen beiden Koordinatengruppen entsprechen, wollen wir in der Form

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_\lambda = \dot{\mathbf{P}}_\lambda - \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vartheta_\lambda}, & \mathbf{P}_\lambda = \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial \dot{\vartheta}_\lambda} \\ \mathbf{R}_\nu = \dot{\mathbf{M}}_\nu - \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial \psi_\nu}, & \mathbf{M}_\nu = \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial \dot{\psi}_\nu} \end{cases}$$

schreiben. Dementsprechend ist für das ganze System

$$S\mu\bar{v}\,\delta\bar{x} = \sum_\lambda \mathsf{P}_\lambda\,\delta\vartheta_\lambda + \sum_\nu \mathsf{M}_\nu\,\delta\psi_\nu,$$

und die Zentralgleichung lautet

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{d\tau}\Big(\sum_\lambda \mathsf{P}_\lambda\,\delta\vartheta_\lambda\Big) + \dfrac{d}{d\tau}\Big(\sum_\nu \mathsf{M}_\nu\,\delta\psi_\nu\Big) \\ = \delta\mathsf{E} + \sum_\lambda \mathsf{Q}_\lambda\,\delta\vartheta_\lambda + \sum_\nu \mathsf{R}_\nu\,\delta\psi_\nu\,. \end{cases}$$

Durch Ausführung der Differentiationen nach der Zeit erhält man zunächst

$$\sum_\lambda \dot{\mathsf{P}}_\lambda\,\delta\vartheta_\lambda - \sum_\lambda \mathsf{Q}_\lambda\,\delta\vartheta_\lambda + \sum_\lambda \mathsf{P}_\lambda\,\delta\dot{\vartheta}_\lambda + \sum_\nu \dot{\mathsf{M}}_\nu\,\delta\psi_\nu - \sum_\nu \mathsf{R}_\nu\,\delta\psi_\nu + \sum_\nu \mathsf{M}_\nu\,\delta\dot{\psi}_\nu = \delta\mathsf{E}\,.$$

Nun ist aber nach den gewöhnlichen Lagrangeschen Ausdrücken, von denen wir ausgegangen sind

$$\dot{\mathsf{P}}_\lambda - \mathsf{Q}_\lambda = \frac{\partial\mathsf{E}}{\partial\vartheta_\lambda} \quad \text{und} \quad \dot{\mathsf{M}}_\nu - \mathsf{R}_\nu = \frac{\partial\mathsf{E}_\nu}{\partial\psi_\nu}\,.$$

Folglich nimmt die Zentralgleichung die Form an

$$\sum_\lambda \frac{\partial\mathsf{E}}{\partial\vartheta_\lambda}\delta\vartheta_\lambda + \sum_\lambda \mathsf{P}_\lambda\,\delta\dot{\vartheta}_\lambda + \sum_\nu \frac{\partial\mathsf{E}}{\partial\psi_\nu}\,\delta\psi_\nu + \sum_\nu \mathsf{M}_\nu\,\delta\dot{\psi}_\nu = \delta\mathsf{E}\,.$$

Beachtet man die Identität

$$\delta\Big(\sum_\nu \mathsf{M}_\nu\,\dot{\psi}_\nu\Big) = \sum_\nu \mathsf{M}_\nu\,\delta\dot{\psi}_\nu + \sum_\nu \dot{\psi}_\nu\,\delta\mathsf{M}_\nu\,,$$

so kann man der vorigen Gleichung auch die Form geben

$$(2)\qquad \begin{cases} \sum_\lambda \dfrac{\partial\mathsf{E}}{\partial\vartheta_\lambda}\,\delta\vartheta_\lambda + \sum_\lambda \mathsf{P}_\lambda\,\delta\dot{\vartheta}_\lambda + \sum_\nu \dfrac{\partial\mathsf{E}}{\partial\psi_\nu} + \delta\Big(\sum_\nu \mathsf{M}_\nu\,\dot{\psi}_\nu\Big) \\ - \sum_\nu \dot{\psi}_\nu\,\delta\mathsf{M}_\nu = \delta\mathsf{E}\,. \end{cases}$$

Routh führt nun eine neue kinematische Funktion H ein durch die Definition

$$(3)\qquad \mathsf{E} - \sum_\nu \mathsf{M}_\nu\,\dot{\psi}_\nu = -\mathsf{H}\,.$$

Hiermit geht die Gleichung (2) über in

$$\text{(4)} \quad \begin{cases} \delta \mathbf{H} = -\sum_\lambda \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vartheta_\lambda} \delta \vartheta_\lambda - \sum_\lambda \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial \dot{\vartheta}_\lambda} \delta \dot{\vartheta}_\lambda - \sum_\nu \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial \psi_\nu} \delta \psi_\nu \\ \qquad + \sum_\nu \dot{\psi}_\nu \delta \mathbf{M}_\nu . \end{cases}$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der Identität

$$\delta \mathbf{H} = \sum_\lambda \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \vartheta_\lambda} \delta \vartheta_\lambda + \sum_\lambda \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \dot{\vartheta}_\lambda} \delta \dot{\vartheta}_\lambda + \sum_\nu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \psi_\nu} \delta \psi_\nu + \sum_\nu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{M}_\nu} \delta \mathbf{M}_\nu ,$$

so folgen sofort die Beziehungen

$$\text{(5)} \qquad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \vartheta_\lambda} = -\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vartheta_\lambda}, \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \dot{\vartheta}_\lambda} = -\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \dot{\vartheta}_\lambda},$$

$$\text{(6)} \qquad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \psi_\nu} = -\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \psi_\nu}, \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{M}_\nu} = \dot{\psi}_\nu .$$

Durch Einführung derselben in die Lagrangeschen Ausdrücke der Systembeschleunigung gewinnt man endlich die Routhsche Form:

$$\text{(7)} \qquad \mathbf{Q}_\lambda = -\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \dot{\vartheta}_\lambda}\right) + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \vartheta_\lambda},$$

$$\text{(8)} \qquad \mathbf{R}_\nu = \frac{d\mathbf{M}_\nu}{d\tau} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \psi} .$$

Dieselben Gleichungen wurden später (1884) von v. Helmholtz in Crelles Journal, Bd. 97, gefunden. Von da ab wurden sie zum Gemeingut der Physiker. Hier konnte nur ihre formale Ableitung gegeben werden, während der Nachweis ihrer großen Bedeutung in der angewandten Mechanik erst in der Dynamik (Bd. 2) erbracht wird.

207. Schlußbemerkungen. Wir haben bisher absichtlich die flüssigen (Systeme) und die festen, elastischen Systeme von unserer Darstellung der Kinematik ausgeschlossen, obwohl ihre Behandlung sich ohne wesentliche Schwierigkeiten hätte anfügen lassen. Es sind lediglich methodische Gründe, welche

uns veranlassen, diesen Teil der Kinematik mit der Dynamik (Bd. 2) zu vereinigen. In einem Handbuch der Kinematik, welches lediglich gelehrten Zwecken zu dienen hat, wäre diese Abtrennung zurzeit nicht gerechtfertigt, da die vorhandene Literatur über diesen Gegenstand, wenn auch zerstreut und systematisch unvollständig, doch ausreichend ist, um eine abgerundete Darstellung desselben zu ermöglichen. Für den Anfänger, dessen Interessen ein elementares Lehrbuch doch in erster Linie vertreten muß, liegt die Sache anders. Er muß bestrebt sein, zunächst das breite Fundament einer Wissenschaft gründlich kennen zu lernen, und sich dabei eine gewisse Beschränkung auferlegen, die er erst später schrittweise aufgeben kann.

Sachregister.